非可換群が作用する同変コルクについて

増田 宙斗

慶應大学

結び目の数理
2018 年 12 月 25 日
早稲田大学

発表の流れ

1. イントロダクション
2. 予備知識
   - リース積
   - Gompf のコルク（スケッチ）
3. 主定理の証明

コルクの定義

G を群、C を境界付きコンパクト可縮 4 次元多様体とする。

Definition

G-コルク (C,φ) とは、C と境界 ∂C への G-作用 φ で以下を満たすものの組である：任意の $g \in G \setminus \{1_G\}$ に対して、$\varphi(g)$ は C 全体の微分同相に拡張されない。

微分同相に拡張されないという仮定は、以下の定理と対照的である。

Theorem ([Fre82])

C の境界の任意の微分同相は、C 全体の位相同型に拡張される。

コルクの定義

(C, φ)：G-コルク、X：閉 4 次元多様体、$e : C \to X$：埋め込みとする。

Definition

$g \in G$ に対して、$X(e, g) := (X \setminus \mathrm{int}\, C) \cup_{\varphi(g)} C$ とする。X から $X(e, g)$ を得る操作をコルク・ツイストという。

$X(e, g)$ $(g \in G)$ は常に位相同型（定理より）だが、微分同相とは限らない。

先行研究

以下の G に対してコルクが構成されている。

- $G = \mathbb{Z}_2$（Akbulut,Yasui）
- $G = \mathbb{Z}_n$（Tange）
- $G < SO(4)$：有限部分群（Auckly-Kim-Melvin-Ruberman）
- $G = \mathbb{Z}^m$（Gompf, Tange）

特に、Auckly-Kim-Melvin-Ruberman は "AKMR-trick" を使い構成した [AKMR17]。

主定理

AKMR-trick と Gompf, Tange の結果を組み合わせることで以下を得た。

Theorem (M.)

$m \geq 0$、$H < SO(4)$ を有限部分群、G を $\mathbb{Z}^m$ の H による拡大とする。このとき G-コルクが存在する。

Theorem (M., 今日は証明しない)

$m \geq 0$、H を有限可解群、G を $\mathbb{Z}^m$ の H による拡大とする。このとき弱同変 G-コルクが存在する。

Remark

上の定理は非可換で無限位数の群が作用するコルクの最初の例となっており、これは [Tan16, Question 1.5] に答える。

リース積

G, H を群とする。
$H^G := \mathrm{Map}(G, H)$ は各点ごとの積により群をなす。
$g \in G$, $F \in H^G$ に対し、${}^gF \in H^G$ を ${}^gF(x) := F(g^{-1}x)$ で定義する。

Definition

H の G によるリース積 $H \wr G$ とは、上の左作用に関する半直積 $H^G \rtimes G$ である。

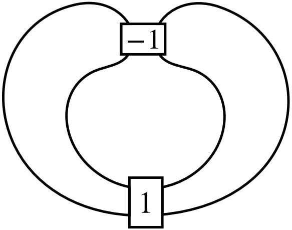
Definition

群 K が H の G による拡大であるとは、完全列 $1 \to H \to K \to G \to 1$ が存在すること。

Theorem ([DM96, Theorem 2.6A])

K が H の G による拡大である $\Rightarrow K \leq H \wr G$.

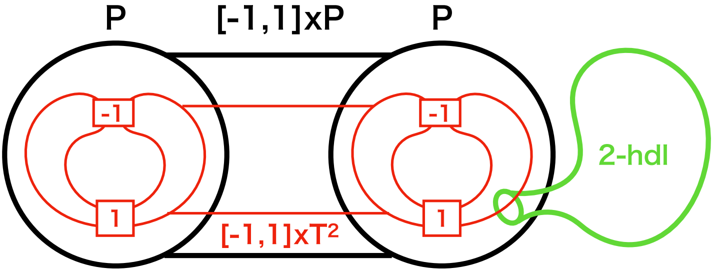
Gompf のコルク（スケッチ）



Definition

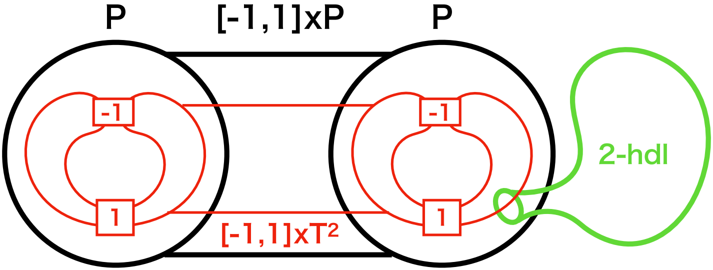
κ を上の結び目とする。

Gompf のコルク（スケッチ）



$P := S^3 \setminus \nu\kappa$ とする。
C を $[-1,1] \times P$ に、$\{1\} \times P$ 内の κ の meridian に沿って -1-framing で 2-ハンドルを貼ったものとする。

Gompf のコルク（スケッチ）



f を ∂C の「ある」微分同相とする（定義は省略）。
$\mathrm{intFix}(f) \neq \emptyset$ in ∂C である。

Theorem (Gompf)

$(C, \langle f \rangle)$ は $\mathbb{Z}$-コルク。

主定理の証明

Theorem

$m \geq 0$、$H < SO(4)$ を有限部分群、G を $\mathbb{Z}^m$ の H による拡大とする。このとき G-コルクが存在する。

Theorem

$m \geq 0$、$H < SO(4)$ を有限部分群とする。このとき $\mathbb{Z}^m \wr H$-コルクが存在する。

Proposition

上の二つは同値

Proof.

(下)⇒(上)：$G \leq \mathbb{Z}^m \wr H$。
(上)⇒(下)：$\mathbb{Z}^m \wr H$ は $\mathbb{Z}^{m|H|}$ の H による拡大。 □

主定理の証明

Proof.

$\boxed{\text{Tange の結果}}$により、ある閉 4 次元多様体 X と互いに交わらない埋め込み

$$s(h, i) : C \to X \quad ((h, i) \in H \times \{1, \ldots, m\})$$

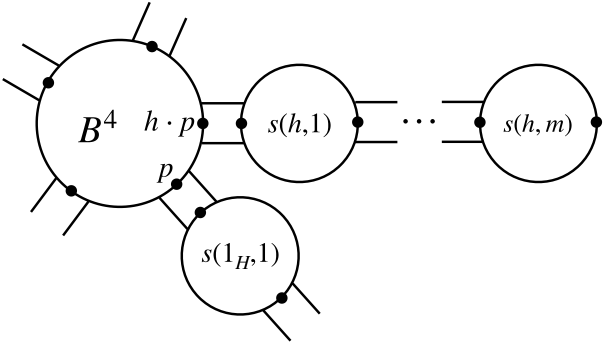
が存在して次を満たす：$F \in \mathbb{Z}^{H \times \{1,\ldots,m\}}$ に対し

$$X(F) := (X \text{ 内の各 } s(h, i)(C) \text{ を } F(h, i) \text{ でツイストした多様体})$$

とすると $X(F)$ は F ごとに互いに微分同相ではない。

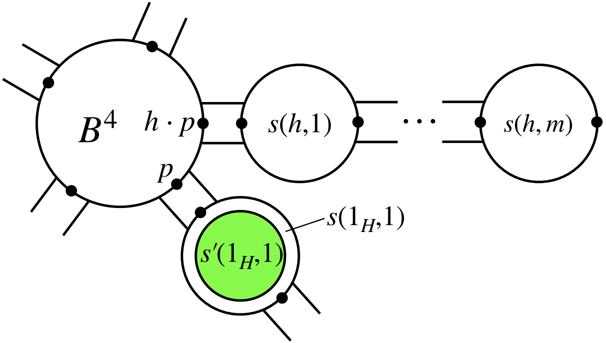
主定理の証明

次に $\boxed{\text{AKMR-trick}}$ を使う。
$s(h,i)$ と交わらないように B^4 を一つ X に埋め込む。
$p \in S^3$ を $h \cdot p$ $(h \in H)$ が互いに異なる点になるように取る。
図のように $s(h,i)$ を 1-handle でつなぐ。このとき、1-handle は Gompf's cork の不動点に接着する。これを $\mathbb{T}$ とする。



主定理の証明

$\boxed{\text{AKMR-trick}}$ を続ける。
$s'(1_H,1)$ を $s(1_H,1)$ を少し小さくしたものとする。
$\mathbb{T} := \overline{\mathbb{T}}(s'(1_H,1),1)$, $Y := X(s'(1_H,1),1)$ とする。
自然に $\mathbb{T} \subset Y$ となっている。



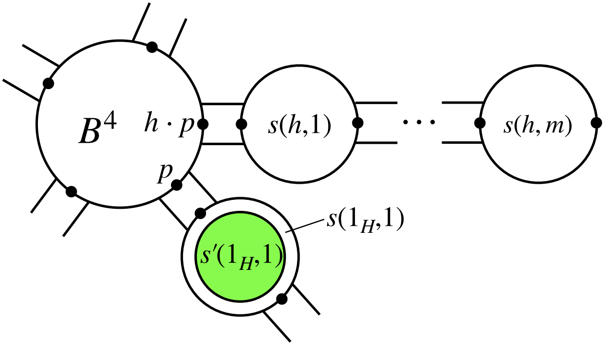
主定理の証明

$\boxed{\text{AKMR-trick}}$ を続ける。

$\bar{\varphi} : H \curvearrowright \overline{\mathbb{T}}$ を B^4 の線形変換を拡張して得られる作用とする。

$$H \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{T}}) \xrightarrow{\text{制限}} \mathrm{Diff}(\partial\overline{\mathbb{T}}) = \mathrm{Diff}(\partial\mathbb{T})$$

により、作用 $\varphi : H \curvearrowright \partial\mathbb{T}$ を得る。

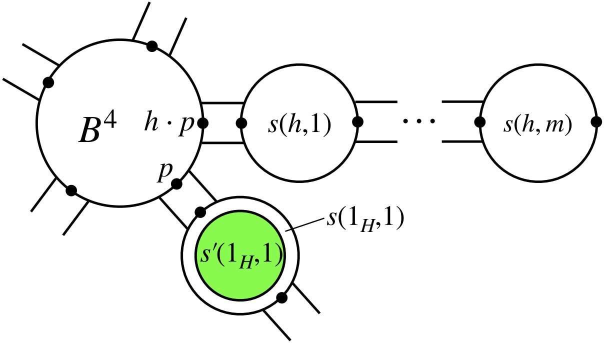


主定理の証明

$\omega : \mathbb{Z}^m \wr H \to \mathrm{Diff}(\partial\mathbb{T})$ を $(F, h) \in \mathbb{Z}^m \wr H$ に対して

$$\omega(F, h) := \left(\prod_{x \in H} \prod_{i \in \{1,\dots,m\}} (s(h, i) \text{ を } 2F(x)_i \text{ でツイスト}) \right) \varphi(h)$$

で定義する。これは準同型になる。



主定理の証明

$\iota : \mathbb{T} \to Y$ を包含写像とすると、$(F, h) \in \mathbb{Z}^m \wr H$ に対して

$$Y(\iota, (F, h)) \cong X(2F + \delta_{(h,1)})$$

となる。ただし、

- $\delta_{(h,1)} \in \mathbb{Z}^{H \times \{1,\ldots,m\}}$ は $(h, 1)$ でのみ 1、他は 0
- $(\mathbb{Z}^m)^H \cong \mathbb{Z}^{H \times \{1,\ldots,m\}}$ と同一視

$2F + \delta_{(h,1)}$ は $(F, h) \in \mathbb{Z}^m \wr H$ ごとに異なる。故に $Y(\iota, (F, h))$ は互いに微分同相ではない。よって、$(\mathbb{T}, \omega)$ は $\mathbb{Z}^m \wr H$-コルクとなる。□

参考文献

- Dave Auckly, Hee Jung Kim, Paul Melvin, and Daniel Ruberman.
  Equivariant corks.
  Algebr. Geom. Topol., Vol. 17, No. 3, pp. 1771–1783, 2017.
- John D. Dixon and Brian Mortimer.
  Permutation groups, Vol. 163 of *Graduate Texts in Mathematics*.
  Springer-Verlag, New York, 1996.
- Michael Hartley Freedman.
  The topology of four-dimensional manifolds.
  J. Differential Geom., Vol. 17, No. 3, pp. 357–453, 1982.
- Motoo Tange.
  Notes on Gompf's infinite order cork.
  ArXiv e-prints, September 2016.