

Shortening the flat length of the Alexander polynomial of 2-bridge knots by twisting

Yuta Nakane

Nagoya institute of Technology

December 23, 2018

Motivation

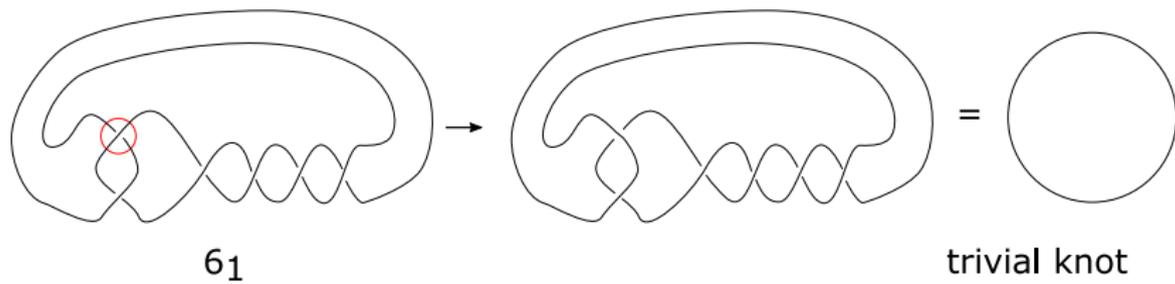
Motivation 1

結び目の local move による不変量の変化のありように興味がある。

Keyword

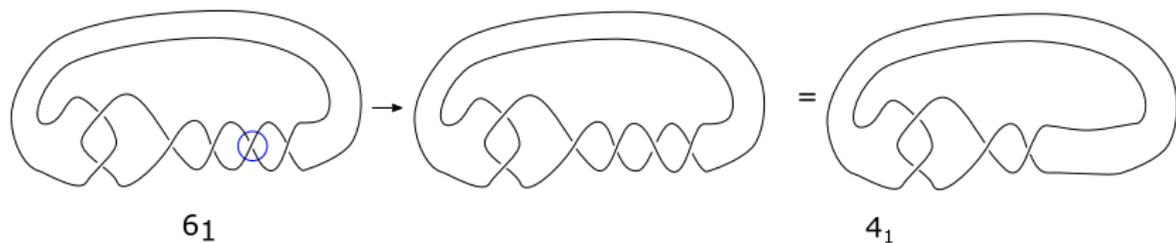
- 2-bridge link
- Seifert surface
- flat length of the Alexander polynomial
- signature

Motivation



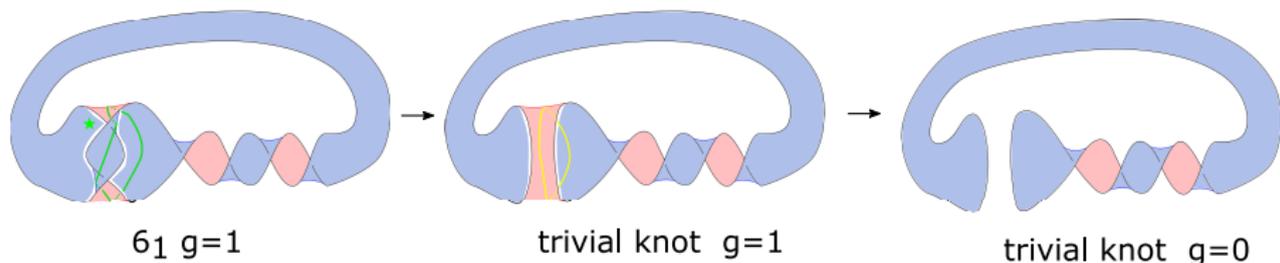
赤丸で囲まれた交差で交差交換を行うと解ける。

Motivation



青丸で囲まれた交差で交差交換を行っても解くことはできない。

Motivation

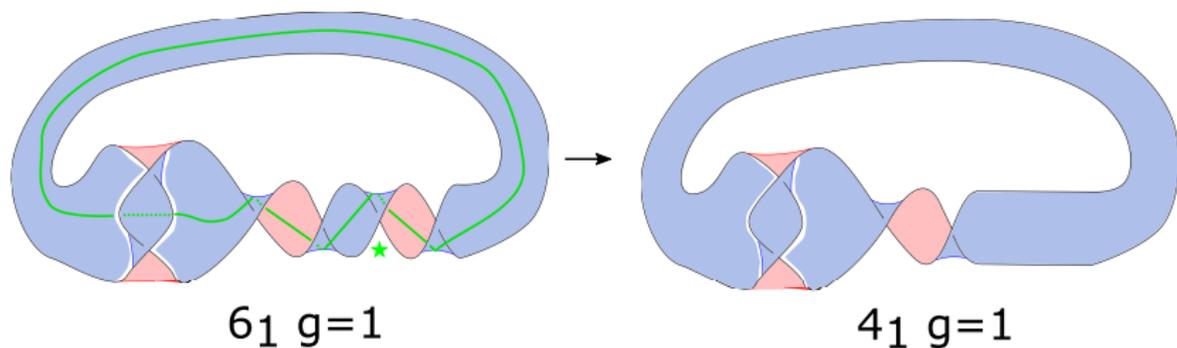


green loop に沿ってプラミングされている Hopf band の fulltwist を 1 つ解消し、曲面を圧縮すると、genus は 0 となる。

Fact 2 (T.Kobayashi [1])

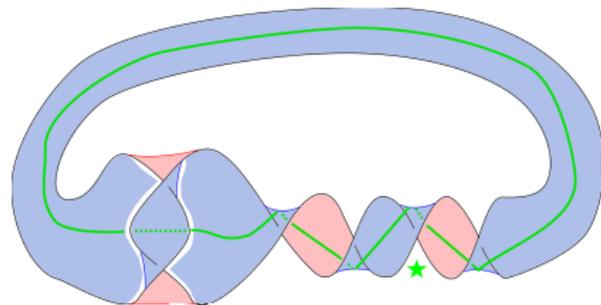
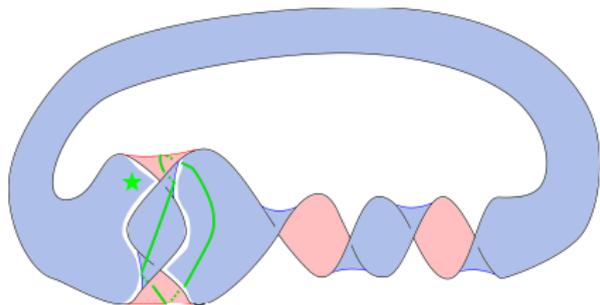
K を unknotting number が 1 の結び目とする。 K のある minimal genus Seifert surface S が存在し、 S にはプラミングされた Hopf band が存在し、その Hopf band の fulltwist を解消させると境界が trivial knot となる。

Motivation



green loop に沿ってプラミングされている 4 回ひねり band の fulltwist を 1 つ解消しても、genus は変わらない。

Motivation



アニュラスによって、fulltwist を 1 つ解消したときの genus の減少具合が異なる。

Motivation 3

曲面の local move による Alexander 多項式の係数の変化のありようを知りたい。

Background

以下交代結び目のみ扱う。交代結び目 K の Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ の係数の符号は交代するが、変数変換 $s = -t$ によって係数をすべて正にして扱う。

便宜上 $D_K(s) := \Delta_K(-t)$ を Alexander 多項式と呼ぶ。

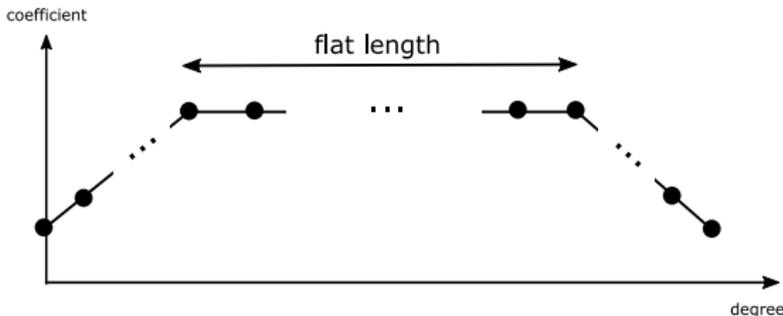
Conjecture 4 (Fox's trapezoidal conjecture [2])

K を交代結び目とし、 $D_K(s) = \sum_{j=0}^{2n} a_j s^j$ を K の Alexander 多項式とする。このとき、以下の不等式が成り立つ。

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-m-1} < a_{n-m} = \cdots = a_{n+m} > a_{n+m+1} > \cdots > a_{2n}$$

70 年代に R.I.Hartley が 2-bridge link に対して証明した [3]。

このときの $\ell := 2m$ を flat length と呼ぶ。



Background

Conjecture 5 (M.Hirasawa, K.Murasugi [4])

K を交代結び目とし、その knot signature を $|\sigma(K)| = 2k$ とし、 $D_K(s) = \sum_{j=0}^{2n} a_j t^j$ を K の Alexander 多項式とする。このとき、不等式

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-m-1} < a_{n-m} = \cdots = a_{n+m} > a_{n+m+1} > \cdots > a_{2n}$$

に対して、 $m \leq k$ が成り立つ。

これは” flat length が signature の絶対値を超えない” という主張である。2018 年に Wenzhao Chen が 2-bridge link に対して証明した [5]。これらの先行結果を踏まえて、次の問題が考えられる。

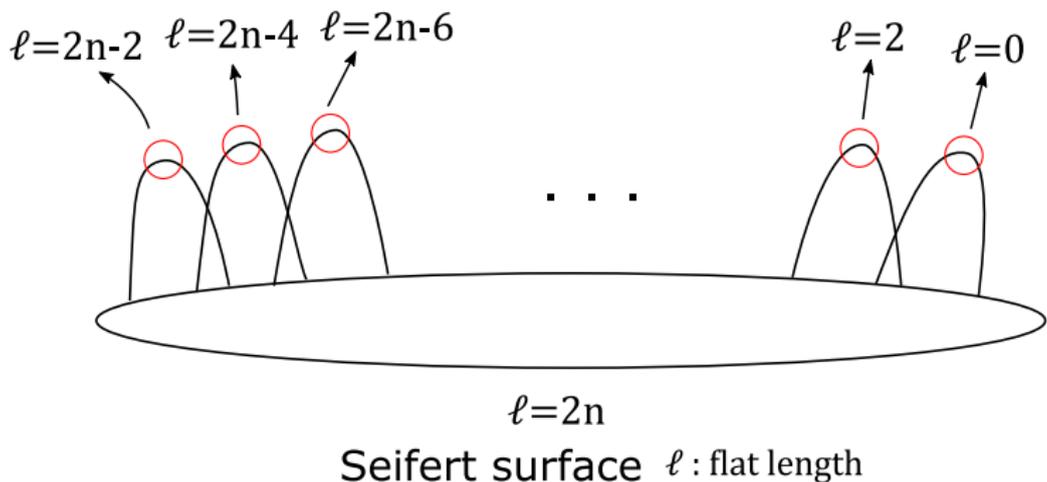
Problem 6

signature の値を固定したとき、それ以下の任意の偶数に対して、その偶数と flat length が一致する結び目は存在するか？

Main result

Main result

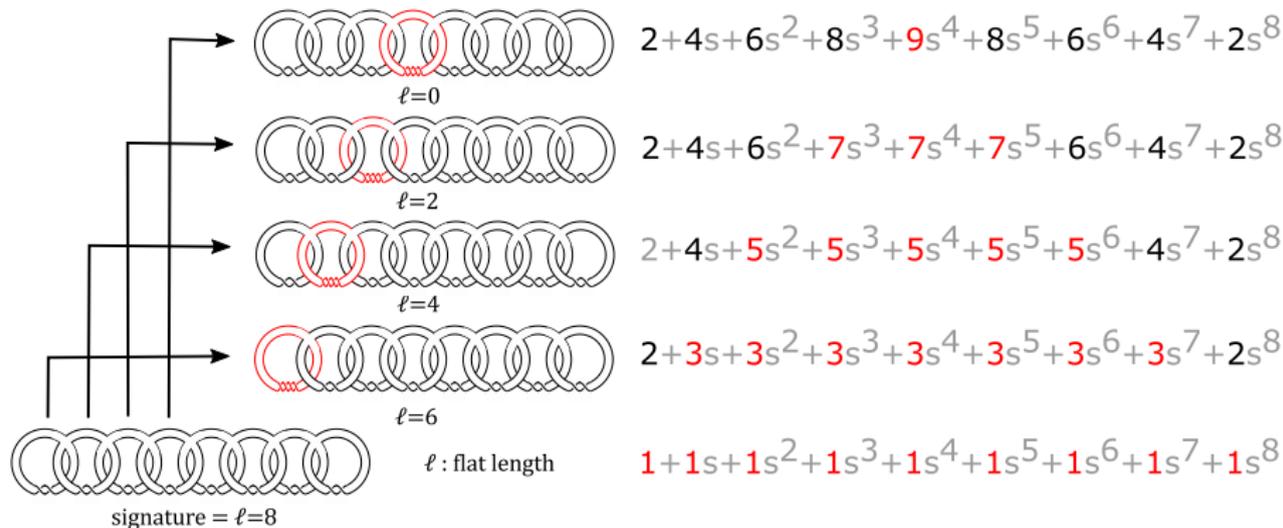
Seifert surface で、どの band の twist 数を増やしても signature は変わらないが、flat length は減少し、その減り具合が band によって異なるものを構成した。



Main result

Example 7

signature 及び flat length が $2n$ となる 2-bridge knot から出発して、それぞれ band twist 一回で得られる 2-bridge knot の列で、signature は $2n$ のままで、flat length が 0 から $2n - 2$ までの偶数が出揃うものを構成できる。

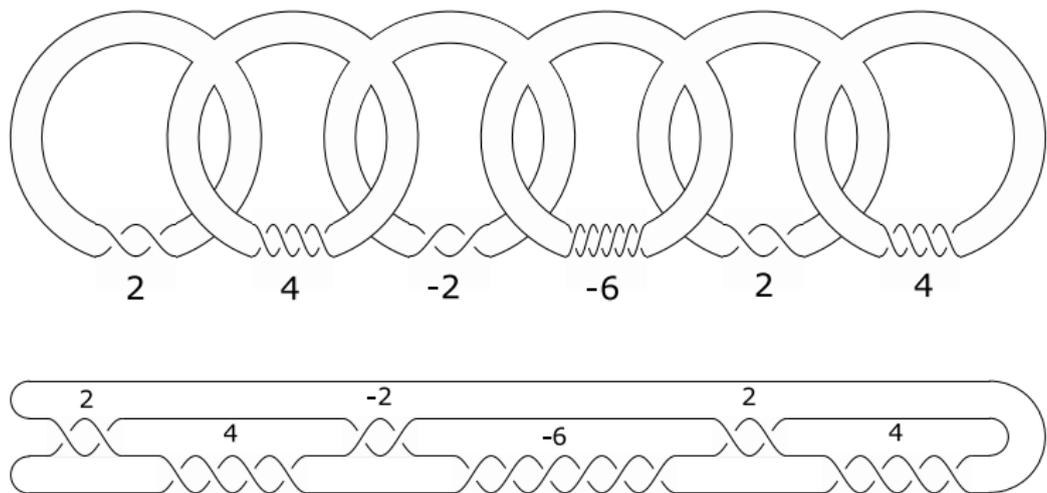


Seifert surface of 2-bridge knots

2-bridge knot は全てアニュラスのプラミングで構成できる。

twist 数は Conway form に対応する。

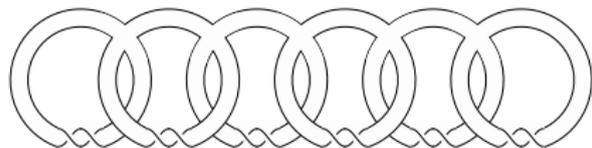
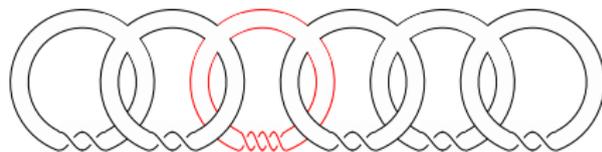
例. $[2, 4, -2, -6, 2, 4]$ の 2-bridge knot (アニュラスのプラミングと Conway form)



Notation of 2-bridge knots

Definition 8

- (1) K_n を $\overbrace{[2, \dots, 2]}^n$ で表される 2-bridge knot とする。
- (2) K_n^i を $\overbrace{[2, \dots, 4, \dots, 2]}^n$ で表される 2-bridge knot とする。
 \uparrow
 i


 K_6

 K_6^3

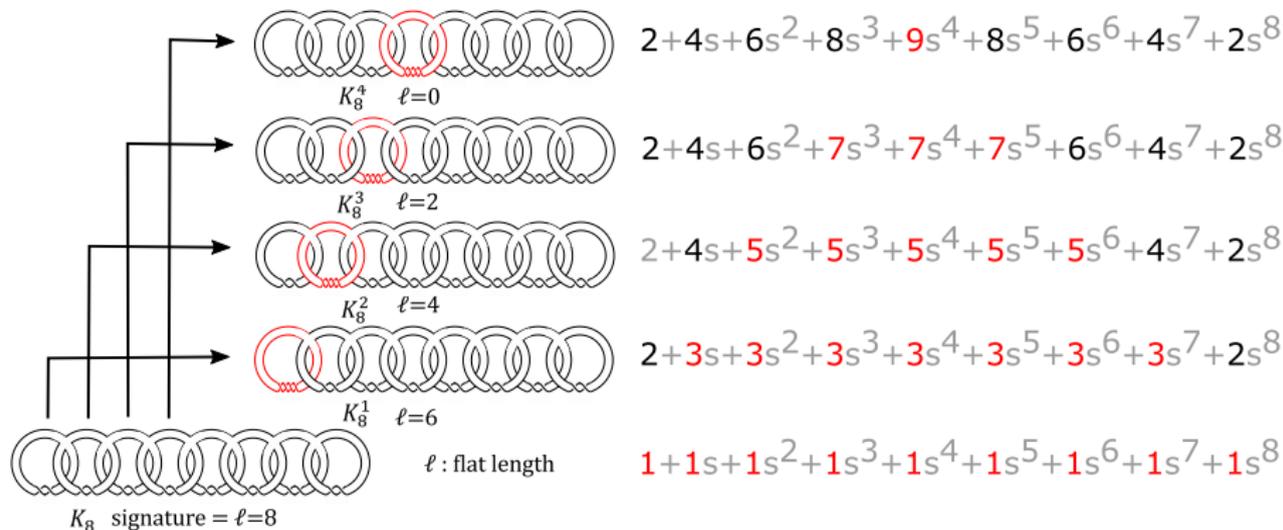
Fact 9

$$\sigma(K_n^i) = n \text{ for } \forall i$$

Main Result (repeated)

Example 7

signature と flat length が $2n$ の 2-bridge knot から出発して、それぞれ band twist を一回行って得られる 2-bridge knot の列で、signature は $2n$ のままで、flat length が 0 から $2n - 2$ までの偶数が出揃うものを構成できる。



Main theorem

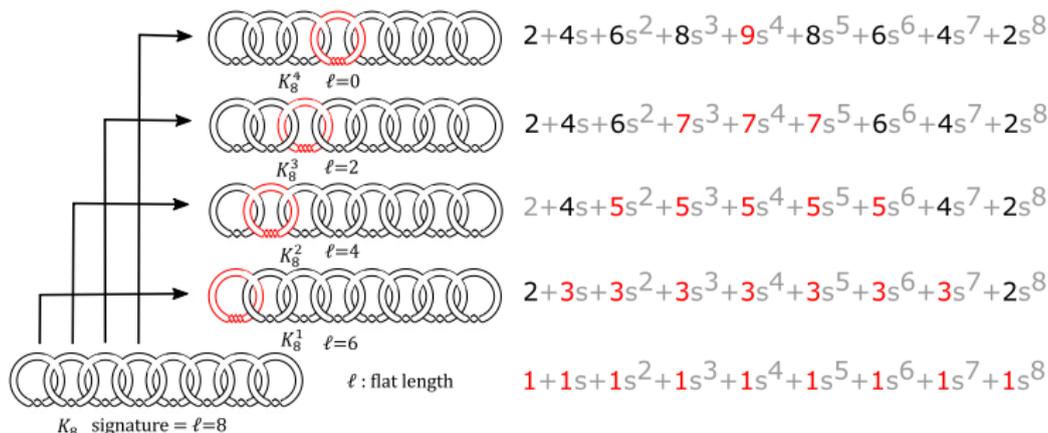
主定理は次である

Main theorem 10

2-bridge knot K_{2n}^i の flat length ℓ と signature σ は、

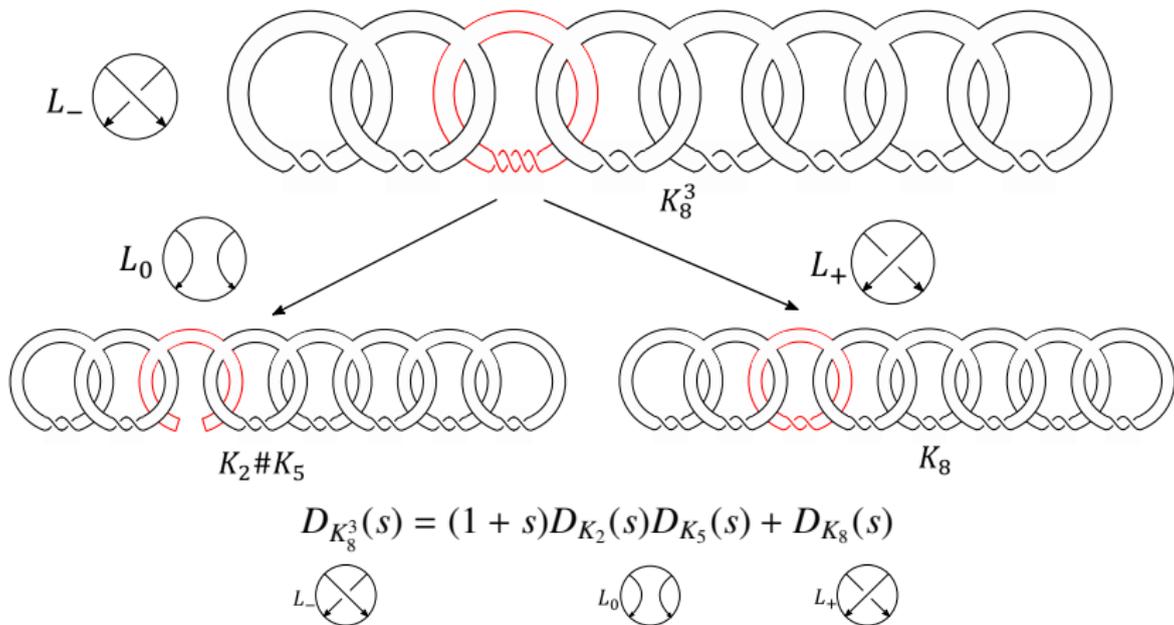
$$\ell = 2(n - i), \quad \sigma = 2n$$

となる。



Sketch of proof

D のスケイン関係式を用いる。 $n = 4, i = 3$ の場合, 3 番目のアニュラスの交差に対するスケイン関係式から以下の等式が成り立つ。



追記：

このとき、 $D_K(s)$ は $\pm s^m$ のずれを許さないとする。

Sketch of proof (続き)

$D_{K_a}(s) = 1 + s + \cdots + s^a$ となるので、 $D_{K_8^3}(s)$ は、

$$\begin{aligned} D_{K_8^3}(s) &= (1+s)D_{K_2}(s)D_{K_5}(s) + D_{K_8}(s) \\ &= (1+s)\underbrace{(1+s+s^2)}_{3 \text{ 項}}\underbrace{(1+s+\cdots+s^5)}_{9-3=6 \text{ 項}} + \underbrace{(1+s+\cdots+s^8)}_{9 \text{ 項}} \end{aligned}$$

ここで、fulltwist を増やす場所に依存する項に注目する。

$$\begin{aligned} \underbrace{(1+s+s^2)(1+s+\cdots+s^5)}_{6-2=4 \text{ 項}} &= 1 + 1s + \overbrace{1s^2 + 1s^3 + 1s^4 + 1s^5} \\ &\quad + 1s + 1s^2 + 1s^3 + 1s^4 + 1s^5 + 1s^6 \\ &\quad + 1s^2 + 1s^3 + 1s^4 + 1s^5 + 1s^6 + 1s^7 \\ &= 1 + 2s + 3s^2 + 3s^3 + 3s^4 + 3s^5 + 2s^6 + 1s^7 \end{aligned}$$

Sketch of proof (続き)

$$\begin{aligned}
 D_{K_8^3}(s) &= (1+s) \underbrace{(1+s+s^2)(1+s+\cdots+s^5)} + (1+s+\cdots+s^8) \\
 &= (1+s) \underbrace{(1+2s+3s^2+3s^3+3s^4+3s^5+2s^6+s^7)} + (1+s+\cdots+s^8) \\
 &= 1+2s+3s^2 + \overbrace{3s^3+3s^4+3s^5}^{3 \text{ 項}} + 2s^6 + 1s^7 \\
 &\quad + 1s+2s^2+3s^3+3s^4+3s^5+3s^6+2s^7+1s^8 \\
 &\quad + 1+1s+1s^2+1s^3+1s^4+1s^5+1s^6+1s^7+1s^8 \\
 &= 2+4s+6s^2 + \underbrace{7s^3+7s^4+7s^5}_{3 \text{ 項}} + 6s^6+4s^7+2s^8
 \end{aligned}$$

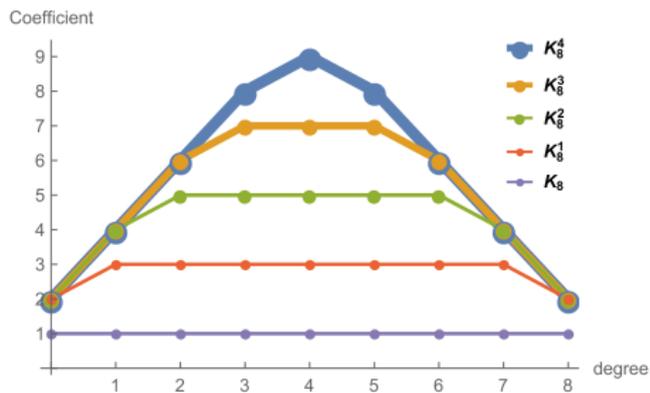
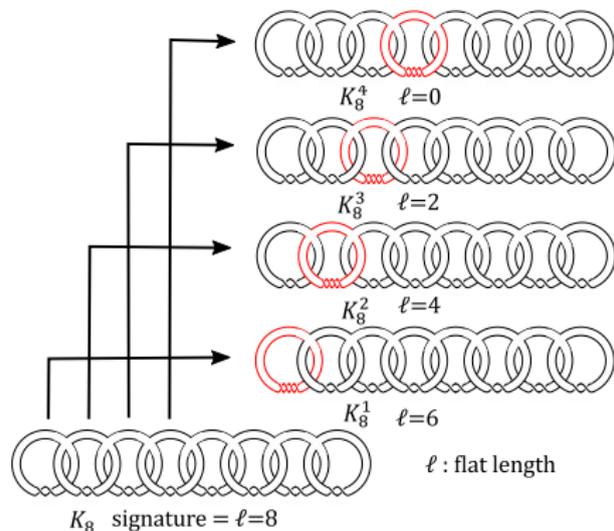
それゆえ $D_{K_8^3}(s)$ の flat length ℓ は

$$\ell = 2$$

となる。

Coefficient

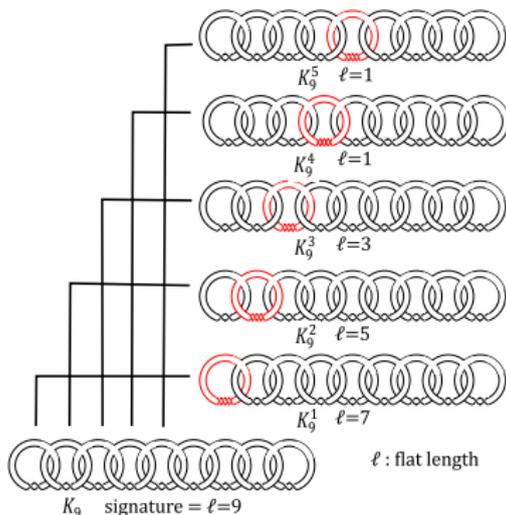
K_{2n}^i の Alexander 多項式の係数のありようもわかった。



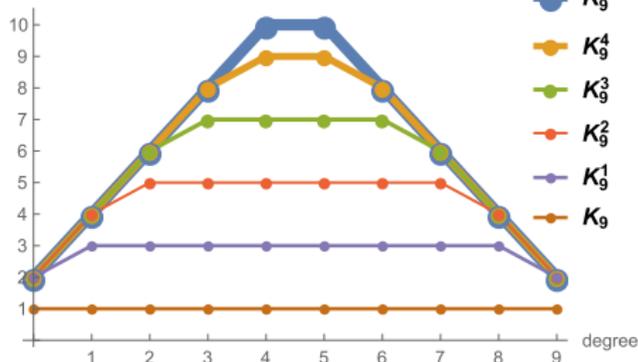
Case of 2-bridge links

Example 11

signature 及び flat length が $2n + 1$ となる 2-bridge link から出発して、それぞれ band twist 一回で得られる 2-bridge link の列で、signature は $2n + 1$ のままで、flat length が 1 から $2n - 1$ までの奇数が出揃うものを構成できる。

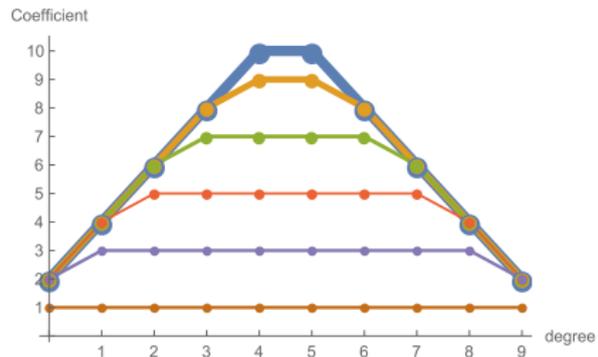
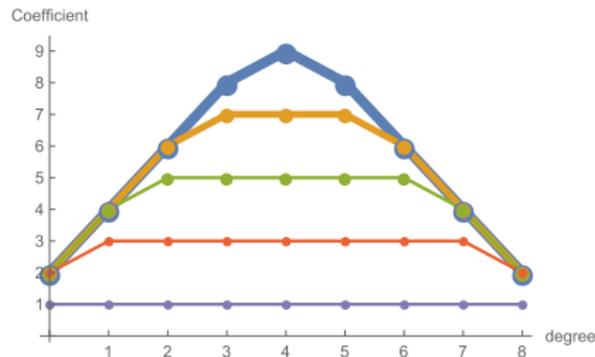


Coefficient



Case of 2-bridge links

knot と link の Alexaner 多項式の係数の比較



References I

- [1] T.Kobayashi, *Minimal genus Seifert surface for unknotting number 1 knots*, Kobe J. Math. 6(1989)53-62
- [2] R.H.Fox, *Problems in knot theory*, in Topology of 3-manifolds and related topics, Proceeding the University of Georgia Institute, 1962
- [3] R.I.Hartley, *On two-bridge knot polynomials*, J.Austral. Math.Soc.(Series A)28(1979), 241-249
- [4] M.Hirasawa and K.Murasugi, *Various stabilities os the alexander polynomials of knots and links*, arXiv:1307.1578v1[math.GT], 2013
- [5] Wenzhao Chen, *On the alexander polynomial and the signature invariant of two-bridge knots*, arXiv:1712.04993v2[math.GT], 2018