研究集会

「結び目の数学 II 」

報告集

２０１０年１月

この報告集は２００９年１２月２３日から２６日まで早稲田大学において行われた
研究集会「結び目の数学 II 」
における講演要旨を収録したものです。

この研究集会は、日本数学会トポロジー分科会トポロジープロジェクトの一環として、
平成２１年度科学研究費補助金（基盤研究（A））
「結び目理論研究」（研究代表者：河内明夫、課題番号 21244005）
の援助を受け、早稲田大学教育学部共催により開催されました。

研究集会の開催に際して、多くの方々のご協力を賜わりました。
ここに厚く御礼申し上げます。

２０１０年1月
谷山 公規　花木 良（早稲田大学教育学部）

目次

$\mathcal{O}(n^2)$ time algorithms for computing Jones polynomials of certain links

Masahiko Murakami[†] Masao Hara[‡] Seiichi Tani[§] Makoto Yamamoto[¶]

概要

[13, 4] で提案された 2–bridge links, closed 3–braid links, Montesinos links の Jones polynomials を計算するアルゴリズムの実行時間を解析し直す事で，それらの実行時間は $\mathcal{O}(n^2)$ 時間である事を示す．ここで，n は入力の Tait graphs の辺数とする．

1　はじめに

結び目理論では絡み目の分類や特徴付けの為に多くの不変量が提案され研究されている．J.W. Alexander [1] は多項式時間で計算可能な Alexander polynomial を提案しているが，自明な結び目と同じ Alexander polynomial を持つ非自明な結び目が知られている．Jones polynomial [7] は絡み目の分類においてより有用であると期待され研究されている．L.H. Kauffman [8] は Kauffman bracket polynomial を用いた組合せ的な計算方法を示している．Kauffman の方法を用いると Jones polynomial は $\mathcal{O}(n)$ 次の多項式の $\mathcal{O}(2^{\mathcal{O}(n)})$ 回の和積で計算される．ここで，n は入力の Tait graphs の辺数とする．F. Jaeger, D.L. Vertigan, D.J.A. Welsh [6, 16] は一般に Jones polynomial の計算は #**P**–hard である事を示しており，最悪の場合，指数時間必要である事が予想されている．K. Sekine, H. Imai, K. Imai [14] は $\mathcal{O}\left(2^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}\right)$ 時間のアルゴリズムを提案している．

近年，絡み目に妥当な制限を設けた場合の Jones polynomial の高速な計算の研究が盛んである．J.A. Makowsky [9, 10] は入力の Tait graphs の木幅が定数で制限されている場合は Jones polynomials は多項式時間で計算可能である事を示している．J. Mighton [11, 12] は入力の Tait graphs の木幅が高々2 である場合は Jones polynomials は $\mathcal{O}(n)$ 次の多項式の $\mathcal{O}(n^4)$ 回の多項式の演算で計算可能である事を示している．M. Hara, S. Tani, M. Yamamoto [5] は arborescent links の Jones polynomials は $\mathcal{O}(n)$ 次の多項式の $\mathcal{O}(n^3)$ 回の多項式の演算で計算可能である事を示している．M. Hara, M. Murakami, S. Tani, M. Yamamoto [13, 4] は 2–bridge links, closed 3–braid links, Montesinos links の Jones polynomials は $\mathcal{O}(n)$ 次の多項式の $\mathcal{O}(n)$ 回の多項式の演算で計算可能である事を示している．T. Utsumi and K. Imai [15] は pretzel links の Jones polynomials は $\mathcal{O}(n^2)$ 時間で計算可能である事を示している．Y. Diao, C. Ernst, U. Ziegler [3] は入力の nested closed tangle diagrams の tangle depths が高々定数である場合は Jones polynomials は多項式時間で計算可能である事を示しており，特に，pretzel links, 2–bridge links, Montesinos links を含む Conway algebraic links の Jones polynomials は $\mathcal{O}(n^2)$ 時間で計算可能である事を示している．

本稿では，[13, 4] で提案された 2–bridge links, closed 3–braid links, Montesinos links の Jones polynomials を計算するアルゴリズムの実行時間を解析し直す事で，それらの実行時間は $\mathcal{O}(n^2)$ 時間である事を示す．

2　準備

$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた互いに素な n 本の単純閉曲線は n 成分の *link* である．1 成分の link は *knot* である．*link diagram* は link の $\mathbb{R}^3$ から平面への射影図で，全ての多重点は交差の上下の情報を持った横断的な二重点である．各二重点は *crossings* と呼ばれ，link diagram $\widetilde{L}$ の crossings の数は $c(\widetilde{L})$ で表す．各成分に向きが与えられた link は *oriented* link である．

定義 2.1　*Kauffman bracket polynomial* は link diagram の集合から変数 A の整係数ローラン多項式環への写像であり，link diagram $\widetilde{L}$ を以下の条件を満たす $\langle\widetilde{L}\rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ へ写す．

[†]The Institute of Information Sciences, College of Humanities and Sciences, Nihon University, Setagaya-ku, Tokyo 156-8550, Japan. masahiko@tani.cs.chs.nihon-u.ac.jp.

[‡]Department of Mathematical Sciences, Tokai University, Hiratsuka-shi, Kanagawa 259-1292, Japan. masao@ss.u-tokai.ac.jp.

[§]Department of Computer Science and System Analysis, Nihon University, Setagaya-ku, Tokyo 156-8550, Japan. tani.seiichi@nihon-u.ac.jp.

[¶]Department of Mathematics, Chuo University, Bunkyo-ku, Tokyo 112-8551, Japan. makotoy@math.chuo-u.ac.jp.

(i) $\langle \bigcirc \rangle = 1$

(ii) $\langle \widetilde{L} \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^{2})\langle \widetilde{L} \rangle$

(iii) $\langle \times \rangle = A\langle\ )(\ \rangle + A^{-1}\langle \asymp \rangle$

ここで，$\bigcirc$ は crossing の無い knot diagram であり，$\widetilde{L} \sqcup \bigcirc$ は $\widetilde{L}$ と $\bigcirc$ の交点の無い和である．(iii) において，3 つの link diagrams は示されている交点の周辺以外は同一である．

観測 2.2 任意の n 交点の *link diagram* の *Kauffman bracket polynomial* の次数は $\mathcal{O}(n)$ で係数は $\mathcal{O}(2^n)$ である．

oriented link diagram $\widetilde{L}$ の *writhe* $w(\widetilde{L})$ は $\widetilde{L}$ の crossings の符号の合計である．ここで各符号は慣例的に図 1 の様に定義される．

定義 2.3 oriented link L の *Jones polynomial* $V(L)$ は以下の様に定義される．

$$V(L) = \left((-A)^{-3w(\widetilde{L})}\langle \widetilde{L} \rangle\right)_{t^{1/2}=A^{-2}} \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}],$$

ここで $\widetilde{L}$ は L の link diagram で $V(L)$ は $\widetilde{L}$ の取り方によらない事が知られいる．

link diagram が与えられたとき，link diagram によって分けられた平面の各領域を，有界でない領域は白とし，境界を共有する領域は異なる色になる様に白と黒の 2 色で塗り分ける．このとき，頂点を黒い領域上，辺を crossing を共有する黒い領域上の頂点間にとり，各辺の符号を慣例的に図 2 の様に定義する．この様に辺に符号のついた平面グラフを link diagram の *Tait graph* と呼ぶ．Tait graph の辺数と link diagram の crossings の数は等しくなる．

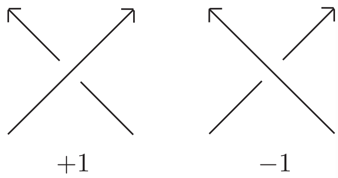


図 1: crossings の符号

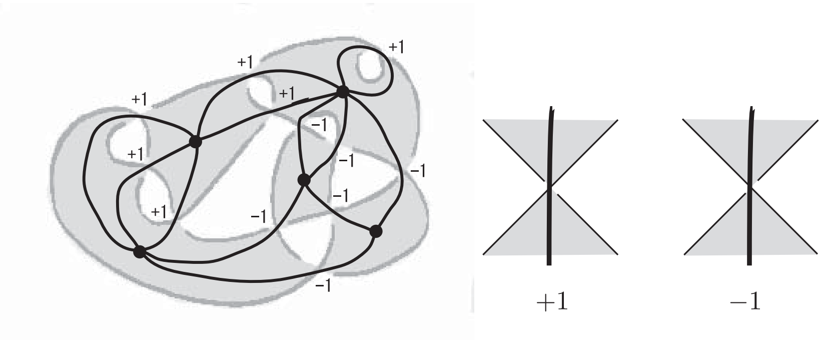


図 2: Tait graph と各辺の符号

tangle は link diagram の一部分で北西，北東，南西，南東の 4 つの端点を持つ（図 3 参照）．交点の無い 2 本の垂直な紐からなる tangle は 0–*tangle* であり，任意の整数 k に対して，0–tangle を k 回捻った tangle は k–*tangle* である．これらは *integer tangles* であり I_k と表す（図 3 参照）．$a_1, \ldots, a_m$ を整数とし，$I_{a_1}, \ldots, I_{a_m}$ から成る図 3 の様な tangle は *rational tangle* である．図 4 の様な link diagram を $\widetilde{R}(a_1, \ldots, a_m)$ とし，図 5 の様な link diagram を $\widetilde{B}(a_1, \ldots, a_m)$ とする．$a_{11}, \ldots, a_{1m_1}, \ldots, a_{l1}, \ldots, a_{lm_l}, a$ を整数とする．l 個の rational tangles から成る図 6 の様な link diagram を $\widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \ldots, a_{lm_l}||a)$ とし，図 7 の様な link diagram を $\widetilde{N}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \ldots, a_{lm_l})$ とする．$\widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \ldots, a_{lm_l})$ は $\widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \ldots, a_{lm_l}||0)$ とする．

観測 2.4 $a_1, \ldots, a_m, a_{11}, \ldots, a_{1m_1}, \ldots, a_{l1}, \ldots, a_{lm_l}, a$ を整数とする．

(i) $c(\widetilde{R}(a_1, \ldots, a_m)) = c(\widetilde{B}(a_1, \ldots, a_m)) = |a_1| + \cdots + |a_m|$

(ii) $c(\widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \ldots, a_{lm_l}||a)) = |a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}| + \cdots + |a_{l1}| + \ldots + |a_{lm_l}| + |a|$

(iii) $c(\widetilde{N}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \ldots, a_{lm_l})) = |a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}| + \cdots + |a_{l1}| + \ldots + |a_{lm_l}|$

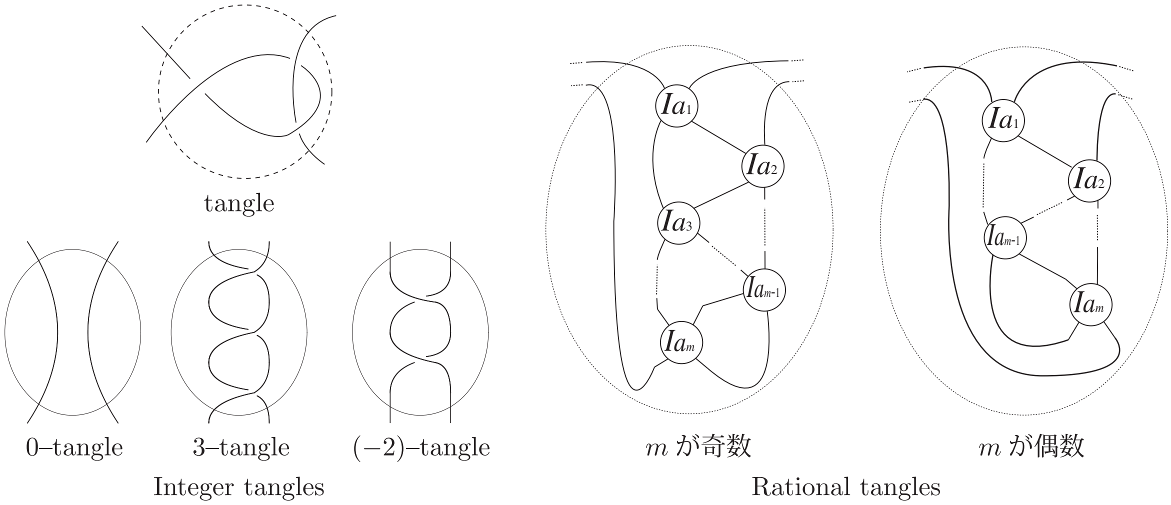


図 3: tangle，integer tangles，rational tangles

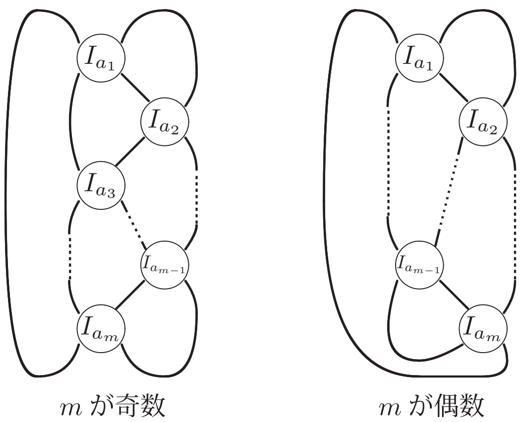


図 4: $\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_m)$

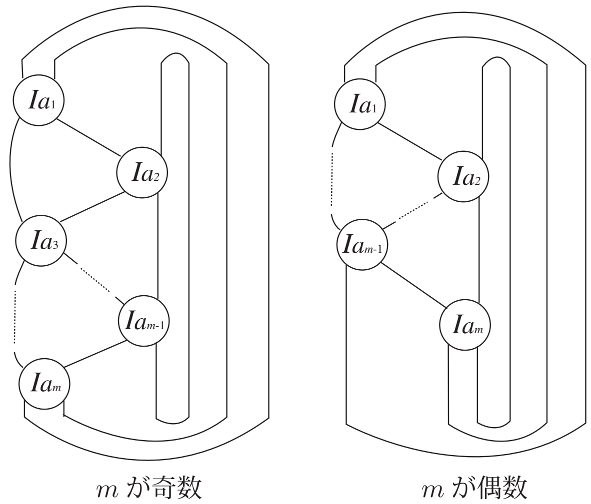


図 5: $\widetilde{B}(a_1,\ldots,a_m)$

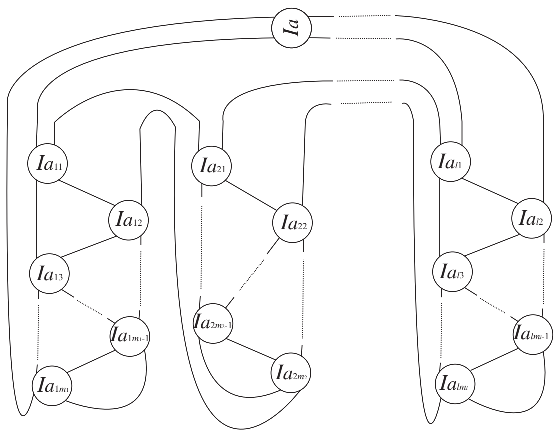


図 6: $\widetilde{M}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l}||a)$

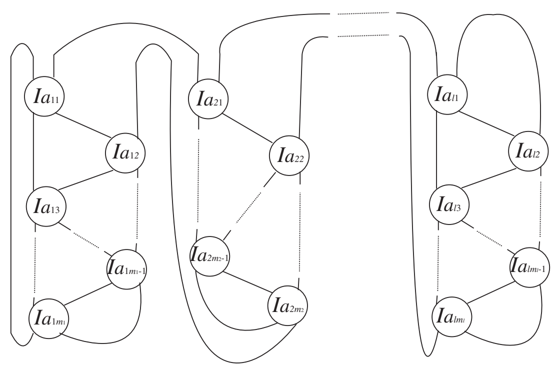


図 7: $\widetilde{N}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l})$

少なくとも 1 つの crossing の上を通りどの crossing の下も通らない link diagram の連続した部分を *overpass* と呼ぶ（図 8 参照）．link diagram の *bridge number* を link diagram の極大な overpasses の数とする．link の *bridge number* をその link の全ての link diagram の bridge number の最小とする．bridge number が 2 である link は *2–bridge link* である．Tait graph $G=(V,E,s)$ に以下の条件を満たす $v\in V$ が存在する様な link diagram を *2–bridge diagram* と呼ぶ.

(i) $G-v$ は path である．

(ii) $G-v$ の両端点が G において v に隣接する．

(iii) G における v の任意の近傍 u に対して，両端点が u と v である全ての辺の符号は等しい．

(iv) 任意の $u \in V-\{v\}$ に対して，G における次数が 2 であるとき u に接続する 2 本の辺の符号は等しい．

(v) v は loop を持たない．

任意の 2–bridge diagram $\widetilde{L}$ に対して，$\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_m)=\widetilde{L}$ となる様な整数列 $(a_1,\ldots,a_m)$ をその 2–bridge diagram の *normal representation* と呼ぶ．normal representation は一意でない事に注意されたい．任意の 2–bridge link は 2–bridge diagram を持つ事が知られている [2]．

braid は互いに素な紐の集合であり，各紐は 2 本の水平な棒に繋がっており 2 本の棒の間の任意の平面とちょうど 1 回ずつ交わっている（図 9 参照）．任意の braid に対して，各紐の端点を図 9 の様に結んだものは braid の *closure* であり，*closed braid link* と呼ぶ．3 本の紐からなる braid は *3–braid* であり，その closure は *closed 3–braid link* である．Tait graph $G=(V,E,s)$ が辺を持たない 2 頂点の graph であるか以下の条件を満たす $v \in V$ が存在する様な link diagram を *closed 3–braid diagram* と呼ぶ．

(i) $G-v$ は閉路である．

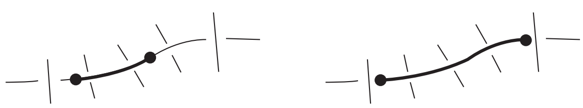
(ii) G における v の任意の近傍 u に対して，両端点が u と v である全ての辺の符号は等しい．

(iii) 任意の $u \in V-\{v\}$ に対して，G における次数が 2 であるとき u に接続する 2 本の辺の符号は等しい．

(iv) v は loop を持たない．

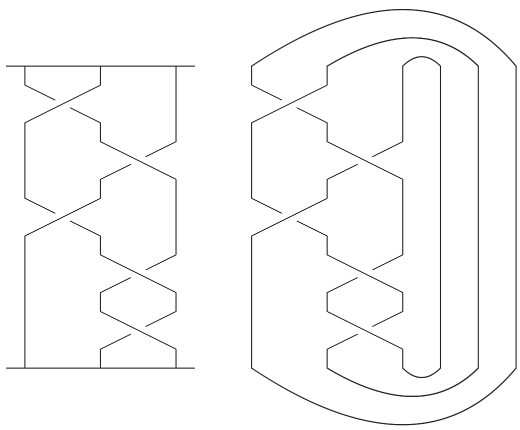
任意の closed 3–bridge diagram $\widetilde{L}$ に対して，$\widetilde{B}(a_1,\ldots,a_m)=\widetilde{L}$ となる様な整数列 $(a_1,\ldots,a_m)$ をその closed 3–bridge diagram の *normal representation* と呼ぶ．normal representation は一意でない事に注意されたい．任意の closed 3–braid link は closed 3–braid diagram を持つ．

l が 3 以上で任意の $i=1,\ldots,l$，$j=1,\ldots,m_i$ に対して m_i が 3 以上の奇数，a_{ij} が 0 でないとき，$\widetilde{M}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l}||a)$ は *Montesinos diagram* である．$(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l}||a)$ をその Montesinos diagram の *normal representation* と呼ぶ．normal representation は一意でない事に注意されたい．Montesinos diagram を持つ様な link を *Montesinos link* と呼ぶ．



overpass　　極大な overpass

図 8: overpass と極大な overpass



3–braid　　3–braid の closure

図 9: 3–braid と closed 3–braid link

任意の整数 n に対して Q_n を以下の様に定義する．

$$Q_n=\frac{1-(-A^4)^n}{1-(-A^4)}=\begin{cases}1+(-A^4)+\cdots+(-A^4)^{n-1} & n>0\\ 0 & n=0\\ -(-A^4)^{-1}-(-A^4)^{-2}-\cdots-(-A^4)^{n} & n<0\end{cases}$$

3 Jones polynomials の計算

[13, 4] で提案された 2–bridge links, closed 3–braid links, Montesinos links の Jones polynomials を計算するアルゴリズムの実行時間を解析し直す．このアルゴリズムは 2–bridge diagrams, closed 3–braid diagrams, Montesinos diagrams の Tait graphs から normal representations を線形時間で構築し，Kauffman bracket polynomials を $\mathcal{O}(n)$ 次の多項式の $\mathcal{O}(n)$ 回の演算で計算する事が示されている．本節では，このアルゴリズムの後半の実行時間を解析し直し，このアルゴリズムが $\mathcal{O}(n^2)$ 時間で終了する事を示す．結果として，2–bridge links, closed 3–braid links, Montesinos links の Jones polynomials は $\mathcal{O}(n^2)$ 時間で計算可能である．ここで，n は入力の Tait graphs の辺数とする．

定理 3.1 ([13, 4]) *2–bridge diagrams, closed 3–braid diagrams, Montesinos diagrams* の *Normal representations* はそれらの *Tait graphs* から $\mathcal{O}(n)$ 時間で計算可能である．ここで，n は入力の *Tait graphs* の辺数である．

以下の漸化式は 2–bride diagrams, closed 3–braid diagrams, Montesinos diagrams の Kauffman bracket polynomials の構造を示している．これらの漸化式を用いる事によって 2–bride diagrams, closed 3–braid diagrams, Montesinos diagrams の Kauffman bracket polynomials は効率的に計算可能である．

補題 3.2 ([13]) 任意の整数列 $(a_1, \ldots, a_m)$ に対して，以下の漸化式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\langle \widetilde{R}(a_1, \ldots, a_m) \rangle \\
=& \begin{cases}
A^{a_1}(-A^{-2} - A^2) - (-A)^{-3a_1+2} Q_{a_1} & m = 1 \\
A^{a_2}(-A^{-3})^{a_1} - (-A)^{-3a_2+2} Q_{a_2} \langle \widetilde{R}(a_1) \rangle & m = 2 \\
A^{a_m}(-A^{-3})^{a_{m-1}} \langle \widetilde{R}(a_1, \ldots, a_{m-2}) \rangle - (-A)^{-3a_m+2} Q_{a_m} \langle \widetilde{R}(a_1, \ldots, a_{m-1}) \rangle & m \geq 3
\end{cases}
\end{aligned}$$

補題 3.3 ([13]) 任意の整数列 $(a_1, \ldots, a_m)$ に対して，以下の漸化式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\langle \widetilde{B}(a_1, \ldots, a_m) \rangle \\
=& \begin{cases}
(-A^{-2} - A^2) \langle \widetilde{R}(a_1) \rangle & m = 1 \\
A^{a_m} \langle \widetilde{B}(a_1, \ldots, a_{m-1}) \rangle - (-A)^{-3a_m+2} Q_{a_m} \langle \widetilde{R}(a_1, \ldots, a_{m-1}) \rangle & m \text{ は } 2 \text{ 以上の偶数} \\
A^{a_m} \langle \widetilde{B}(a_1, \ldots, a_{m-1}) \rangle - (-A)^{-3(a_1+a_m)+2} Q_{a_m} \langle \widetilde{R}(a_2, \ldots, a_{m-1}) \rangle & m \text{ は } 3 \text{ 以上の奇数}
\end{cases}
\end{aligned}$$

補題 3.4 ([4]) 任意の整数列の列 $(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l1}, \ldots, a_{lm_l})$ と整数 a に対して，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\langle \widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l1}, \ldots, a_{lm_l} || a) \rangle \\
=& A^a \langle \widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l1}, \ldots, a_{lm_l}) \rangle - (-A)^{-3a+2} Q_a \langle \widetilde{N}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l1}, \ldots, a_{lm_l}) \rangle
\end{aligned}$$

補題 3.5 ([4]) 任意の整数列の列 $(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l1}, \ldots, a_{lm_l})$ に対して，以下の漸化式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\langle \widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l1}, \ldots, a_{lm_l}) \rangle \\
=& \begin{cases}
(-A^{-3})^{a_{11}} & l = 1 \text{ かつ } m_1 = 1 \\
(-A^{-3})^{a_{11}} \langle \widetilde{R}(a_{12}, \ldots, a_{1m_1}) \rangle & l = 1 \text{ かつ } m_1 \geq 2 \\
A^{a_{l1}} \langle \widetilde{N}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l-11}, \ldots, a_{l-1m_{l-1}}) \rangle & \\
\quad -(-A)^{-3a_{l1}+2} Q_{a_{l1}} \langle \widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l-11}, \ldots, a_{l-1m_{l-1}}) \rangle & l \geq 2 \text{ かつ } m_l = 1 \\
(-1)^{a_{l1}} A^{-3a_{l1}+a_{l2}} \langle \widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l-11}, \ldots, a_{l-1m_{l-1}}) \rangle & \\
\quad -(-A)^{-3a_{l2}+2} Q_{a_{l2}} \langle \widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l1}) \rangle & l \geq 2 \text{ かつ } m_l = 2 \\
(-1)^{a_{lm_l-1}} A^{-3a_{lm_l-1}+a_{lm_l}} \langle \widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l1}, \ldots, a_{lm_l-2}) \rangle & \\
\quad -(-A)^{-3a_{lm_l}+2} Q_{a_{lm_l}} \langle \widetilde{M}(a_{11}, \ldots, a_{1m_1} | \cdots | a_{l1}, \ldots, a_{lm_l-1}) \rangle & l \geq 2 \text{ かつ } m_l \geq 3
\end{cases}
\end{aligned}$$

補題 3.6 ([4]) 任意の整数列の列 $(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l})$ に対して，以下の漸化式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\langle\widetilde{N}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l})\rangle\\
&=\begin{cases}
\langle\widetilde{R}(a_{11},\ldots,a_{1m_1})\rangle & l=1\\
\left(A^{a_{l1}}(-A^{-2}-A^{2})-(-A)^{-3a_{l1}+2}Q_{a_{l1}}\right)\langle\widetilde{N}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l-11},\ldots,a_{l-1m_{l-1}})\rangle & l\geq 2 \text{ かつ } m_l=1\\
(-1)^{a_{l1}}A^{-3a_{l1}+a_{l2}}\langle\widetilde{N}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l-11},\ldots,a_{l-1m_{l-1}})\rangle & \\
\quad -(-A)^{-3a_{l2}+2}Q_{a_{l2}}\langle\widetilde{N}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1})\rangle & l\geq 2 \text{ かつ } m_l=2\\
(-1)^{a_{lm_l-1}}A^{-3a_{lm_l-1}+a_{lm_l}}\langle\widetilde{N}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l-2})\rangle & \\
\quad -(-A)^{-3a_{lm_l}+2}Q_{a_{lm_l}}\langle\widetilde{N}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l-1})\rangle & l\geq 2 \text{ かつ } m_l\geq 3
\end{cases}
\end{aligned}
$$

以下の procedures は 2–bridge diagrams, closed 3–braid diagrams, Montesinos diagrams の normal representations が与えられたとき，補題 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 の漸化式を用いてその Kauffman bracket polynomials を効率的に計算する．procedures の実行中，各 Kauffman bracket polynomial は高々1 回しか計算しない．

Procedure bracket_2–bridge
  Input: An integer sequence $(a_1,\ldots,a_m)$.
  Output: The Kauffman bracket polynomial $\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_m)\rangle$.
  Compute $\langle\widetilde{R}(a_1)\rangle$;
  `if` $m\geq 2$ `then` Compute $\langle\widetilde{R}(a_1,a_2)\rangle$;
  `for` i `:=` 3 `to` m `do` Compute $\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_i)\rangle$;

Procedure bracket_3–braid
  Input: An integer sequence $(a_1,\ldots,a_m)$.
  Output: The Kauffman bracket polynomial $\langle\widetilde{B}(a_1,\ldots,a_m)\rangle$.
  Compute $\langle\widetilde{R}(a_1)\rangle$ and $\langle\widetilde{B}(a_1)\rangle$;
  `for` i `:=` 2 `to` m `do` Compute $\langle\widetilde{B}(a_1,\ldots,a_i)\rangle$, $\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_i)\rangle$ and $\langle\widetilde{R}(a_2,\ldots,a_i)\rangle$;

Procedure bracket_montesinos
  Input: A sequence of integer sequences $(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l})$ and an integer a.
  Output: The Kauffman bracket polynomial $\langle\widetilde{M}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l}||a)\rangle$.
  Compute $\langle\widetilde{M}(a_{11},\ldots,a_{1m_1})\rangle$ and $\langle\widetilde{N}(a_{11},\ldots,a_{1m_1})\rangle$;
  `for` i `:=` 2 `to` l `do`
    `for` j `:=` 1 `to` m_i `do`
      Compute $\langle\widetilde{M}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{i1},\ldots,a_{ij})\rangle$ and $\langle\widetilde{N}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{i1},\ldots,a_{ij})\rangle$;
  Compute $\langle\widetilde{M}(a_{11},\ldots,a_{1m_1}|\cdots|a_{l1},\ldots,a_{lm_l}||a)\rangle$;

定理 3.7 Procedure bracket_2–bridge は *Kauffman bracket polynomial* $\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_m)\rangle$ を $\mathcal{O}(c(\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_m))^2)$ 時間で計算する．

証明 この procedure の実行時間の解析を行う．観測 2.2, 2.4 より，任意の $i=2,\ldots,m$ に対して，$Q_{a_i}\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_{i-1})\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_{i-1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_i|(|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|))$ 時間で計算可能である．従って補題3.2 より，$\langle\widetilde{R}(a_1)\rangle$ は $\mathcal{O}(|a_1|)$ 時間で，$\langle\widetilde{R}(a_1,a_2)\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_1)\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_2|(|a_1|+|a_2|))$ 時間で，任意の $i=3,\ldots,m$ に対して，$\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_i)\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_{i-2})\rangle$, $\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_{i-1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_i|(|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|))$ 時間で計算可能である．結果として，この procedure は $\langle\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_m)\rangle$ を $\mathcal{O}(c(\widetilde{R}(a_1,\ldots,a_m))^2)$ 時間で計算する． □

定理 3.8 Procedure bracket_3–braid は *Kauffman bracket polynomial* $\langle\widetilde{B}(a_1,\ldots,a_m)\rangle$ を $\mathcal{O}(c(\widetilde{B}(a_1,\ldots,a_m))^2)$ 時間で計算する．

証明 この procedure の実行時間の解析を行う．観測 2.2, 2.4 より，任意の $i = 2, \dots, m$ に対して，$Q_{a_i}\langle\widetilde{R}(a_1, \dots, a_{i-1})\rangle$，$Q_{a_i}\langle\widetilde{R}(a_2, \dots, a_{i-1})\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_1, \dots, a_{i-1})\rangle$，$\langle\widetilde{R}(a_2, \dots, a_{i-1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_i|(|a_1| + \cdots + |a_{i-1}|))$ 時間で計算可能である．補題 3.2 より，$\langle\widetilde{R}(a_1)\rangle$ は $\mathcal{O}(|a_1|)$ 時間で，$\langle\widetilde{R}(a_1, a_2)\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_1)\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_2|(|a_1| + |a_2|))$ 時間で，任意の $i = 3, \dots, m$ に対して，$\langle\widetilde{R}(a_1, \dots, a_i)\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_1, \dots, a_{i-2})\rangle$，$\langle\widetilde{R}(a_1, \dots, a_{i-1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_i|(|a_1| + \cdots + |a_{i-1}|))$ 時間で計算可能である．補題 3.2 より，$\langle\widetilde{R}(a_2)\rangle$ は $\mathcal{O}(|a_2|)$ 時間で，$\langle\widetilde{R}(a_2, a_3)\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_2)\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_3|(|a_2| + |a_3|))$ 時間で，任意の $i = 4, \dots, m$ に対して，$\langle\widetilde{R}(a_2, \dots, a_i)\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_2, \dots, a_{i-2})\rangle$, $\langle\widetilde{R}(a_2, \dots, a_{i-1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_i|(|a_2| + \cdots + |a_{i-1}|))$ 時間で計算可能である．従って補題 3.3 より，$\langle\widetilde{B}(a_1)\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_1)\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_1|)$ 時間で，任意の $i = 2, \dots, m$ に対して，$\langle\widetilde{B}(a_1, \dots, a_i)\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_1, \dots, a_{i-1})\rangle$, $\langle\widetilde{R}(a_2, \dots, a_{i-1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_i|(|a_1| + \cdots + |a_{i-1}|))$ 時間で計算可能である．結果として，この procedure は $\langle\widetilde{B}(a_1, \dots, a_m)\rangle$ を $\mathcal{O}(c(\widetilde{B}(a_1, \dots, a_m))^2)$ 時間で計算する． □

定理 3.9 Procedure bracket_montesinos は *Kauffman bracket polynomial* $\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \dots, a_{lm_l}||a)\rangle$ を $\mathcal{O}(c(\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \dots, a_{lm_l}||a))^2)$ 時間で計算する．

証明 この procedure の実行時間の解析を行う．観測 2.2, 2.4 より，任意の $i = 2, \dots, l$，$j = 2, \dots, m_i$ に対して，$Q_{a_{i1}}\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i-11}, \dots, a_{i-1m_{i-1}})\rangle$，$Q_{a_{i1}}\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i-11}, \dots, a_{i-1m_{i-1}})\rangle$ は $\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i-11}, \dots, a_{i-1m_{i-1}})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i-11}, \dots, a_{i-1m_{i-1}})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_{i1}|(|a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}| + \cdots |a_{i-11}| + \cdots + |a_{i-1m_{i-1}}|))$ 時間で，$Q_{a_{ij}}\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij-1})\rangle$，$Q_{a_{ij}}\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij-1})\rangle$ は $\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij-1})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij-1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_{ij}|(|a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}| + \cdots + |a_{i1}| + \cdots + |a_{ij-1}|))$ 時間で，$Q_a\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \dots, a_{lm_l})\rangle$ は $\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \dots, a_{lm_l})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a|(|a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}| + \cdots + |a_{i1}| + \cdots + |a_{ij}|))$ 時間で計算可能である．定理 3.7 より，$\langle\widetilde{R}(a_{11}, \dots, a_{1m_1})\rangle$, $\langle\widetilde{R}(a_{12}, \dots, a_{1m_1})\rangle$ は $\mathcal{O}((|a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}|)^2)$ 時間で計算可能である．従って補題 3.4, 3.5, 3.6 より，任意の $i = 2, \dots, l$，$j = 2, \dots, m_i$ に対して，$\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1})\rangle$ は $\langle\widetilde{R}(a_{11}, \dots, a_{1m_1})\rangle$，$\langle\widetilde{R}(a_{12}, \dots, a_{1m_1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}|)$ 時間で，$\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1})\rangle$ は $\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i-11}, \dots, a_{i-1m_{i-1}})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i-11}, \dots, a_{i-1m_{i-1}})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_{i1}|(|a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}| + \cdots + |a_{i-11}| + \cdots + |a_{i-1m_{i-1}}|))$ 時間で，$\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, a_{i2})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, a_{i2})\rangle$ は $\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i-11}, \dots, a_{i-1m_{i-1}})\rangle$，$\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i-11}, \dots, a_{i-1m_{i-1}})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_{i2}|(|a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}| + \cdots + |a_{i1}|))$ 時間で，$\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij})\rangle$ は $\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij-2})\rangle$，$\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij-1})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij-2})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{i1}, \dots, a_{ij-1})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a_{ij}|(|a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}| + \cdots + |a_{i1}| + \cdots + |a_{ij-1}|))$ 時間で，$\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \dots, a_{lm_l}||a)\rangle$ は $\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \dots, a_{lm_l})\rangle$，$\langle\widetilde{N}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \dots, a_{lm_l})\rangle$ から $\mathcal{O}(|a|(|a_{11}| + \cdots + |a_{1m_1}| + \cdots + |a_{i1}| + \cdots + |a_{ij}|))$ 時間で計算可能である．結果として，この procedure は $\langle\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \dots, a_{lm_l}||a)\rangle$ を $\mathcal{O}(c(\widetilde{M}(a_{11}, \dots, a_{1m_1}|\cdots|a_{l1}, \dots, a_{lm_l}||a))^2)$ 時間で計算する． □

系 3.10 *2–bridge links, closed 3–braid links, Montesinos links* の *Jones polynomials* は *2–bridge diagrams, closed 3–braid diagrams, Montesinos diagrams* の *Tait graphs* から $\mathcal{O}(n^2)$ 時間で計算可能である．ここで，n は入力の *Tait graphs* の辺数である．

4 まとめ

本稿において，[13, 4] で提案された 2–bridge links, closed 3–braid links, Montesinos links の Jones polynomials を計算するアルゴリズムが $\mathcal{O}(n^2)$ 時間で動作する事を示している．このアルゴリズムは理論的に高速なだけでなく実装も容易であり，実際にこれらの Jones polynomials を効率的に計算可能である．

今後，絡み目の分類への一助として，これらの Jones polynomials の効率的な列挙が期待される．また，他の絡み目のクラスの Jones polynomials を効率的に計算するアルゴリズムの研究も期待される．

参考文献

[1] J.W. Alexander, Topological invariants of knots and links, *Trans. Amer. Math. Soc.* 30 (1928) 275–306.

[2] G. Burde, H. Zieschang, *Knots, 2nd ed.*, Walter de Gruyter, 1985. R

[3] Y. Diao, C. Ernst, U. Ziegler, Jones polynomial of knots formed by repeated tangle replacement operations, *Topol. Appl.* 156 (2009) 2226–2239.

[4] M. Hara, M. Murakami, S. Tani, M. Yamamoto, A fast Algorithm for computing Jones polynomials of Montesinos links, *Scientiae Mathematicae Japonicae* 69 (2009) 1–26.

[5] M. Hara, S. Tani, M. Yamamoto, A polynomial-time algorithm for computing the Jones polynomials of arborescent links, in: *Information Technology Letters*, vol. 1, 2002, pp. 16–17 (in Japanese).

[6] F. Jaeger, D.L. Vertigan, D.J.A. Welsh, On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 108 (1990) 35–53.

[7] V.F.R. Jones, A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985) 103–111.

[8] L.H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology* 26 (1987) 395–407.

[9] J.A. Makowsky, Colored Tutte polynomials and Kauffman brackets for graphs of bounded tree width, in: *Proceedings of the 12th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SIAM, Philadelphia, 2001, pp. 487–495.

[10] J.A. Makowsky, Coloured Tutte polynomials and Kauffman brackets for graphs of bounded tree width, *Discrete Appl. Math.* 145 (2005) 276–290.

[11] J. Mighton, Knot Theory on Bipartite Graphs, Ph.D. Thesis, Dept. of Math., University of Toronto, Canada, 1999.

[12] J. Mighton, Computing the Jones polynomial on bipartite graphs, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (5) (2001), 703–710.

[13] M. Murakami, M. Hara, S. Tani, M. Yamamoto, Fast algorithms for computing Jones polynomials of Certain links, *Theor. Comput. Sci.* 374 (2007) 1–24.

[14] K. Sekine, H. Imai, K. Imai, Computation of Jones Polynomial, *Trans. Japan Soc. Ind. Appl. Math.* 8 (3) (1998) 341–354 (in Japanese).

[15] T. Utsumi, K. Imai, Computation of the Jones Polynomials for Pretzel Links, *IPSJ SIG Tech. Rep.* (085) (2002) 43–48 (in Japanese).

[16] D.J.A. Welsh, *Complexity: Knots, Colorings and Counting*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

FUNCTIONAL EXTENSIONS OF KNOT QUANDLES

TETSUYA ITO

1. Introduction

This paper is a primary report of author's work about knot quandles. The details will appear elsewhere in the future.

A quandle is a set Q with a binary operation $*$ which satisfies some axioms. In this paper, we denote the inverse operation of $*$ by $\overline{*}$. We call a pair (Q, h) consisting of a quandle Q and its element $h \in Q$ *pointed quandle*. A morphism between pointed based quandles (Q, h) and (P, i) is defined as a quandle morphism f which satisfies $f(h) = i$. We denote the category of pointed quandles and the category of quandles by $\mathcal{PQ}$, $\mathcal{Q}$ respectively.

For each knot K, one can associate a quandle Q_K, called the *knot quandle*. It is known that the knot quandle distinguish all knots up to orientation. Moreover, using the (co)homology theories of quandles, the knot quandle provide a knot invariant called a *quandle cocycle invariant* [CJKLS],[CEGS].

The aim of this paper is to provide a functor-valued invariant of knots, which extends the knot quandles and shares many good properties. We introduce the *quandle invariant functor* $I_K : \mathcal{PQ} \to \mathcal{Q}$ for each knot K. This functor is a generalization of a group-valued invariant of knots, studied by Crisp-Paris [CP] and Wada [W]. By considering the associated group of our quandle invariants, we obtain these group-valued invariants.

We construct the quandle invariant functor by three different methods. The first method use a representation of the braid groups derived from a pointed quandle, which generalize the Artin representation of the braid groups. In the second method we use a knot diagram, and define the quandle invariants by giving generators and presentations. This construction extends the classical presentation of knot quandles. This point of view is useful when we extends the quandle cocycle invariants. In the third method we provide a geometric construction of quandle invariants as the fundamental quandle of a pair of topological spaces.

Our main results are summarized as follows.

Theorem 1. *Let K be a knot. Then there exists a functor $I_K : \mathcal{PQ} \to \mathcal{Q}$ having the following properties.*

(1) *For the trivial* 1*-quandle T_1, $I_K(T_1)$ is the knot quandle Q_K.*
(2) $H_1(I_K(Q, h); \mathbb{Z}) \cong H_1(Q; \mathbb{Z})$.
(3) *If (Q, h) is a finite pointed quandle, then there exists a homology class $[K]_{Q,h} \in H_2^Q(I_K(Q, h); \mathbb{Z})$ determined by the knot K. $[K]_{Q,h} = 0$ if and only if K is unknot.*

This research was supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

The existence of the characteristic class $[K]_{Q,h}$ implies that we can define a cocycle invariant using (generalized) quandle homology theories as in the classical knot quandle case [CJKLS],[CEGS].

We remark that although we restricted our attention to knots, but one can easily generalize the above main results for links with appropriate modification. In this paper, we do not give any proofs. However, once an appropriate formulation or definition is made, then the proofs of main results in this paper is not difficult.

2. Quandle invariant from braid representation

Let (Q,h) be a pointed quandle and $Q^{*n} = Q_1 * Q_2 * \cdots * Q_n$ be the free product of n-copies of Q. For each element $q \in Q$, we denote the corresponding element in $Q_i \subset Q^{*n}$ by q_i. The *representation associated to the pointed quandle* (Q,h) is a homomorphism $\rho_{Q,h} : B_n \to \mathrm{Aut}\,(Q)$ defined by

$$\rho_{Q,h}(\sigma_k) \; : \left\{ \begin{array}{rcl} q_k & \mapsto & q_{k+1} \mathbin{\overline{*}} h_{k+1} \\ q_{k+1} & \mapsto & q_k * h_{k+1} \\ q_i & \mapsto & q_i \quad (i \neq k, k+1) \end{array} \right.$$

By considering the associated group of Q which we will denote by $\mathrm{Ass}(Q)$, we also obtain a representation $\rho'_{Q,h} : B_n \to \mathrm{Aut}\,(\mathrm{Ass}(Q^{*n}))$. This representation is explicitly written as

$$\rho'_{Q,h}(\sigma_i) \; : \left\{ \begin{array}{rcl} q_k & \mapsto & h_{k+1}^{-1} q_{k+1} h_{k+1} \\ q_{k+1} & \mapsto & h_{k+1} q_k h_{k+1}^{-1} \\ q_i & \mapsto & q_i \quad (i \neq k, k+1) \end{array} \right.$$

and coincide with the *Artin type representation* of B_n associated to the pair $(\mathrm{Ass}(Q), h)$, which is defined in [CP].

For a n-braid β, we define the *quandle invariant* $I_\beta(Q,h)$ by

$$I_\beta(Q,h) = Q^{*n} / \{ [\rho_{Q,h}(\beta)](q) = q \mid q \in Q^{*n} \}.$$

For a pointed quandle morphism $f : (Q,h) \to (R,i)$, we define a morphisms of quandle invariants $I_\beta(f) : I_\beta(Q,h) \to I_\beta(R,i)$ by $[I_K(f)](q_i) = [f(q)]_i$. Then the correspondence I_β of pointed quandles to quandles defines a functor $I_\beta : \mathcal{PQ} \to \mathcal{P}$.

Theorem 2. *If the closures of braids β and α represents the same knot, then I_β and I_α defines the same functor. Thus, the functor I_β defines a knot invariant.*

3. Diagrammatic description of invariant quandle

We give an alternative definition of the quandle invariant functor by using knot diagrams.

Let D be an oriented knot diagram, which is a projection of a knot on the plane having a transverse double points together with the "over and under" information. We indicate this information by breaking the under-passing segment. Let $\mathcal{A}(D) = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ be a set of large arcs, which is an connected component of D. Each large arc A_i is decomposed to subarcs $a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,k_i}$ by removing the double points of D. We call these subarcs *small arcs* of D, and denote the set of small arcs by $\mathcal{SA}(D)$. For a small arc a, we denote the large arc containing a by A.

Let (Q,h) be a pointed quandle and $Q^{*m} = Q_A * Q_B * \cdots$ be the free product of m-copies of Q, where each copy of Q is labeled by the large arc of D. For each $q \in Q$ and a large arc A, we denote by q_A the element in $Q_A \subset Q^{*m}$ corresponding to q. First of all, we define the coloring map $c_q : \mathcal{SA}(D) \to Q^{*m}$ for each element $q \in Q$ by the following way.

(1) For a small arc b which contains the starting point of the large arc B, we define $c_q(b) = q_B$.
(2) At the crossing point x, we put small arcs a, b, b', c as in the figure 1. Assume that we have defined the value $c_q(b)$. Then we define $c_q(b')$ by

$$\begin{cases} c_q(b') = c_q(b) \mathbin{\overline{*}} h_B \text{ if the crossing x is positive.} \\ c_q(b') = c_q(b) * h_B \text{ if the crossing x is negative.} \end{cases}$$

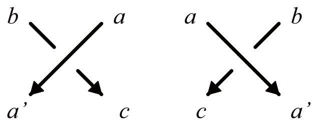


Figure 1. Small arcs around crossing

Now we associate a relation $R(x; q)$ at each crossing point x and $q \in Q$ as

$$R(x;q) : \begin{cases} c_q(c) = c_q(b) * h_A \text{ if the crossing x is positive.} \\ c_q(c) = c_q(b) \mathbin{\overline{*}} h_A \text{ if the crossing x is negative.} \end{cases}$$

Now we define the quandle invariant $I_D(Q, h)$ of a knot diagram D as the quotient quandle $Q^{*m} / \cup_{x,q} R(x; q)$.

Theorem 3. *A quandle $I_D(Q, h)$ is a link invariant, and it coincide with the invariant quandle $I_L(Q, h)$.*

This definition of invariant quandle functor is useful to study the homology group of $I_D(Q, h)$. For an oriented knot diagram D, define a 2-chain $(D) \in C_2^Q(I_D(Q, h); \mathbb{Z})$ by

$$(D) = \sum_{q \in Q} \sum_{x} \varepsilon(x) \cdot \{(c_q(a), h_B) - (c_q(b), h_B)\}.$$

where x runs all crossing points of D and a, b are small arcs as in the figure 2.

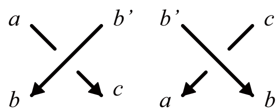


Figure 2. Definition of 2-chain (D)

Proposition 1. *(D) is a cycle and its homology class $[D] \in H_2^Q(I_K(Q, h); \mathbb{Z})$ is a knot invariant. Moreover, $[D] = 0$ if and only if D represents the unknot.*

We denote by $[K]_{Q,h}$ the homology class $[D]$ and call it the *(Q,h)-fundamental class*. If one consider the trivial 1-quandle T_1, the T_1-fundamental class coincide with the orientation class of knot quandle Q_K defined in Eisermann [E].

Using (Q, h)-fundamental class, now we extends the quandle cocycle invariants for our quandle invariant. Let X be a finite quandle and $\phi \in C_Q^2(X; G)$ be a G-coefficient 2-cocycle of X. For each $q \in Q$ and a morphism $\rho : I_K(Q, h) \to X$, let us put $\rho_q = \rho \circ c_q : \mathcal{SA}(D) \to X$.

For each crossing x of D, we define a weight $W(x,q;\rho)$ at the crossing x by

$$W(x,q;\rho)=\varepsilon(x)\{\phi(\rho_q(a),\rho(h_B))-\phi(\rho_q(b),\rho(h_B))\}.$$

where $\varepsilon(x)$ is $+1$ (resp. -1) if x is a positive (resp. negative) crossing. The (Q,h)-*extended quandle cocycle invariant* is defined as the sum of all weights

$$\Phi_{(Q,h),\phi}(D)=\sum_{\rho}\prod_{q\in Q}\prod_{x}W(x,q;\rho)\in\mathbb{Z}[G]$$

where x runs all crossings of D and ρ runs all morphisms $\rho: I_K(Q,h)\to X$. By definition, the (Q,h)-extended quandle cocycle invariant is described as the pairing

$$\Phi_{(Q,h),\phi}(D)=\sum_{\rho}\left\langle\rho_*([D]_{Q,h}),[\phi]\right\rangle.$$

Thus, we obtain the following.

Theorem 4. *The (Q,h)-extended quandle cocycle invariant $\Phi_{(Q,h),\phi}(D)$ is a knot invariant and its value depends on the cohomology class $[\phi]\in H^2_Q(X;G)$.*

Especially, T_1-extended quandle cocycle invariant is a classical quandle cocycle invariant of knots defined in [CJKLS]. By the similar method, we can also extend the generalized quandle cocycle invariant defined in [CEGS] using the (Q,h)-extended fundamental class.

4. Spatial realization of quandle invariants

Finally we realize our quandle invariant as a fundamental quandle of a pointed pair of topological space. A pointed pair of topological space is a triple $(X,A,*)$ consisting of a topological space X, its subspace A, and a point $*\in X\backslash A$.

First we review the definition of fundamental quandle, introduced by Joyce [J]. Let $N=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 1\}\cup\{z\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\mid 1\leq z\leq 5\}$. We denote by $-\!\!\odot$ the pointed pair of topological space $(N,0,5)$. The fundamental quandle $Q(X,A,*)$ of a pointed pair of topological space $(X,A,*)$ is defined as the homotopy classes of the map $f:-\!\!\odot\to(X,A,*)$. The isomorphism class of the fundamental quandle $Q(X,A,*)$ is independent of a choice of a base point $*$, so we simply denote the fundamental quandle by $Q(X,A)$.

Under some conditions, for example, in the case A is a codimension two embedding, we can define the notion of positive intersections. The *positive fundamental quandle* $Q^+(X,A,*)$ is a subquandle of $Q(X,A,*)$ generated by the map $f:-\!\!\odot\to(X,A,*)$ which positively intersects with K at the point $f(0)$.

Let $K=\widehat{\beta}$ be a link represented as the closure of an n-braid β. and Q be a positive fundamental quandle of a pointed topological pair $(X,A,*)$. For an element $h\in Q$, we take a map $f:-\!\!\odot\to(X,A,*)$ be a map which represents h. Now we construct a topological pair whose positive fundamental quandle is isomorphic to $I_K(Q,h)$.

Let D be a 2-disc $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq n+1\}$ and $P=\{1,2,\cdots,n\}$. The positive fundamental quandle $Q^+(D,P)$ is the rank n free quandle. Let $g_i:-\!\!\odot\to(D,P)$ be a map as in the figure 3. Now glue n-copies of $(X,A,*)$ along N_i by the map

$g_i^{-1} \circ f$ and let us denote the obtained pointed topological pair by $(Z, S, *)$. Then the positive fundamental quandle $Q^+(Z, S)$ is isomorphic to Q^{*n}.

For a circle C_i (resp. $C_{i,i+1}$) in D which encloses p_i (resp. p_i and p_{i+1}), we denote the half Dehn twist along C_i (resp. $C_{i,i+1}$) by τ_i (resp. $\tau_{i,i+1}$). Let $T_i = \tau_i^{-3}\tau_{i+1}^{-1}\tau_{i,i+1}$ (See figure 3). Then the homeomorphism T_i is extended as a homeomorphism of the pointed pair of space $T_i^Z : (Z, S, *) \to (Z, S, *)$.

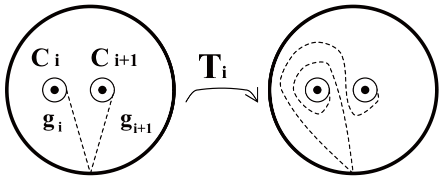


FIGURE 3. Maps g_i and T_i

Lemma 1. *The homomorphism* $\Phi : B_n \to Aut(Q^{*n})$ *defined by* $\sigma_i \mapsto (T_i^Z)_*$ *is identical with the associated braid representation* $\rho_{Q,h}$.

Let $B : Z \to Z$ be a homeomorphism which corresponds to the braid β and $(M(Z), M(S), *)$ be the mapping torus of B. Then the total space $M(Z)$ has a torus boundary $\partial D \times S^1$. Along this torus boundary, we glue a solid torus so that $\{*\} \times S^1$ is identified with $\partial D^2 \times \{\text{point}\}$. Let us denote the obtained pointed pair of space by $(\Omega, M(S), *)$. This is a space which realizes our quandle invariant as a positive fundamental quandle.

Theorem 5. *The positive fundamental quandle of* $(\Omega, M(S), *)$ *is isomorphic to the quandle invariant* $I_K(Q, h)$.

By this theorem, we obtain geometrical meanings of quandle invariants in special cases. Let FQ_n be the rank n free quandle generated by $q_1, \cdots, q_n$, which is a positive fundamental quandle of $(D^2, \{n - points\})$. Thus, from theorem 5, we conclude that $I_K(FQ_n, q_i)$ is isomorphic to the link quandle $Q_{K^{(n)}}$, where $K^{(n)}$ is a n-parallel of the knot K.

REFERENCES

[CP] J.Crisp, L.Paris, *Representation of the braid group by automorphisms of group, invariant of links, and Garside groups,* Pacific J. of Math., , No.2 (1992), 265-285.

[CEGS] J.Carter, M.Elhamdadi, M.Graña M.Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modlues and generalized quandle homology,* Osaka J. Math., **42**,(2005), 499-541.

[CJKLS] J.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *Quandle cohomology and statesum invariants of knotted curve and surfaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **355**,(2003), 3947-3989.

[E] M.Eisermann, *Homological characterization of the unknot,* J. Pure. Appl. Alg., **177**,(2003), 131-157.

[J] D.Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle,* J. Pure. Appl. Alg. **23**, (1982), 37-65.

[W] M.Wada, *Group invariants of links,* Topology, **31**, (1992), 399-406.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCE, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, MEGURO-KU, TOKYO, 153-8914, JAPAN

E-mail address: tetitoh@ms.u-tokyo.ac.jp

奇素数位数の Alexander quandle における quandle 整 homology 群の決定

野坂 武史 (京都大学 数理解析研究所)

概要

主定理は, 奇素数位数の Alexancer quandle の quandle 整 homology 群を全て決定したことである。特に二面体 quandle の場合, [7] による the *delayed Fibonacci conjecture* が解決される. さらに cohomology 群も決定し, その生成元となる cocycle 全ての記述を与えた. そして, 有限連結 Alxander quandle M の整 homology 群が $|M|$ で annihilate される事も示した. 詳細はプレプリント [8] を参照されたい.

1　Introduction :歴史的背景

Quandle とは, 群より弱めた条件を満たす 2 項演算で定義される. 有限 quandle$X$ に対して, Quandle (co)homology が J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito によって導入された [1]. そのコホモロジーの $2, 3$ 又は 4-cocycle が与えられたとき classical knot や 2-knot の quandle cocycle 不変量が定義されている (詳細は [1, 2] 等を参照). 従って cocycle 不変量を計算する為には, その quandle (co)homology を決定し cocycle を具体的に記述する事は重要である. T.Mochizuki は有限体上の Alexander quandle の場合の 2- と 3-cocycles の全てを決定している [5, 6]. 一方, R. A. Litherland と S. Nelson は有限 quandle の quandle homology の自由部分群と捻れ部分群を評価した [4]. 高次の quandle homology においては M. Niebrzydowski と J. Przytycki が quandle homological operations を考察している [7]. J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito は X-color 付き高次元 knot diagram と quandle homology の cycle との関連が論じられている [2]. その cycle と高次元 cocycles との pairing が, 余次元 2 の高次元 knot の不変量として期待されている.

2　主結果

以上を踏まえ, 主結果は奇素数 p 位数の Alexander quandle における quandle 整 homology を決定した事である. **Alexander quandle** とは, $\mathbb{Z}[T^{\pm}]$-加群 M と二項演算 $x * y = Tx + (1-T)y$ との組である. 実は, 奇素数 p を位数とする連結な quandle X は, $^{\exists}\omega\ (\neq 0,1) \in \mathbb{Z}_p$ で $X = \mathbb{Z}_p[T]/(T-\omega)$ という型の Alexander quandle に同型である事が知られている [3]. このクラスは quandle の圏の中で非自明かつ最もシンプルな quandle といえる.

定理 2.1. *$X = \mathbb{Z}_p[T]/(T-\omega)$ を Alexander quandle とする, ここで $\mathbb{Z}_p \ni \omega \neq 0, 1$*[*1] *とする. e を ω の位数とする*[*2]*. このとき, X の quandle 整 homology 群は $H_1^Q(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p^{b_1}$ であり $H_n^Q(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p^{b_n}$ である $(n \geq 2)$, ここで数列 b_n は次で決定される:*

$$b_{n+2e} = b_n + b_{n+1} + b_{n+2}, \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_{2e-2} = 0, \quad \text{and} \quad b_{2e-1} = b_{2e} = 1.$$

[*1] $\omega = 0, 1$ は省く. というのも $\omega = 0$ のとき, quandle の公理を満たさず, $\omega = 1$ のとき X が自明 quandle であるからである.
[*2] つまり, $\omega^e = 1$ となる最小の自然数を e とおいている.

あまつさえ, この cohomology 群も全て決定し、生成元である cocycle に具体的な記述を与えた. 詳細は節 6.2 で与える.

他方で有限かつ連結な Alexander quandle の整 homology の捻れ部分群を強く評価した.

定理 2.2. *M を有限かつ連結な Alexander quandle とする. 即ち $\mathbb{Z}[T^{\pm}]$ 加群として $M = (1-T)M$ とする. このとき整 homology 群 $H_n^Q(X;\mathbb{Z})$ の任意の元は $|M|$ 倍で消える.*

4 節で $H_n^Q(X;\mathbb{Z})$ の定義を与え, 定理 2.2 を証明する.

3 定理の系と, いくつかの注意

homology 群が消えにくい $\omega = -1$ の場合に着目しよう. このとき X を**二面体 quandle** という. [7] による the *delayed Fibonacci conjecture* が解決される.

系 3.1. *([7, Conjecture 5]) X を位数 p とする二面体 quandle とする. このとき quandle 整 homology は $H_1^Q(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p^{b_1}$ であり $H_n^Q(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p^{b_n}$ となる $(n \geq 2)$, ここで b_n は $b_{n+3} = b_{n+2} + b_n$, $b_1 = b_2 = 0$, と $b_3 = 1$ によって決まる.*

Proof. $e = 2$ である. 母関数 $F_b(x) = \sum_{i \geq 1} b_i x^i \in \mathbb{Z}[[x]]$ をおけば, 定理 2.1 より

$$F_b(x) = \frac{b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4}{1 - x^2 - x^3 - x^4} = \frac{x^3 + x^4}{1 - x^2 - x^3 - x^4} = \frac{x^3}{1 - x - x^3}.$$

Q.E.D

さて 1-knot や 2-knot の quandle cocycle 不変量においては 2,3,4 次のホモロジーが重要である。次の系は, 二面体 quandle のみが有用である事を意味する.

系 3.2. *$X = \mathbb{Z}_p[T]/(T - \omega)$ を上記の Alexander quandle とする. もし $\omega \neq -1, 0, 1$ のとき $n = 2, 3, 4$ に対し $H_n^Q(X;\mathbb{Z}) \cong 0$ である. $\omega = -1$ のときは, $H_3^Q(X;\mathbb{Z}) \cong H_4^Q(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ である. さらに 4 次 cohomology $H_Q^4(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p^2$ であり*[*3], *次の cocycle で生成される.*

$$\psi_{4,0}(x,y,z,w) := (x-y) \cdot \big(2(z-w)^p - (2z-w-y)^p - (y-w)^p\big)/p,$$
$$\psi_{4,1}(x,y,z,w) := \big((x-2y+z)^p + (x-z)^p - 2(x-y)^p\big) \cdot \big(2w^p - (2z-w)^p - z^p\big)/p^2.$$

Proof. 前半は $\omega \neq -1$ から $2e - 1 > 4$ による. 後半は後述の節 6.2 からわかる. Q.E.D

ところで次に話を転じ, 定理 2.2 と既存の結果を比較する. 望月氏によって連結な Alexander quandle M に対してその quandle homology は有限であることが示されている [5, Theorm 1.1]. また [4, Theorem 1] によって, $H_n(M;\mathbb{Z})$ が $|M|^n$ で annihilate される事が示されている. また定理 2.2 は $|M| = 3$ のみの場合 [7] で示されおり, 次が予想されていた:

[*3] 3 次 cohomology 群 $H_Q^3(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ は生成元込で [5] で知られている.

系 3.3. *[7, Conjecture 16] X を $X = \mathbb{Z}_p[T]/(T-\omega)$ という型の Alexander quandle とする．このとき $H_n^Q(X;\mathbb{Z})$ は p 倍で annihilate される．*

これは定理 2.2 より明らかである．以上を踏まえれば, 定理 2.2 の評価は, 既存の結果と較べ強い評価であり, 多少なりとも躍進している部分があると思われる．

因みに, 定理 2.2 は Alexander quandle 特有の現象である．つまり Alexander ではない連結有限 quandle X に対して, $H_n(X;\mathbb{Z})$ が $|M|$ で annihilate されると限らない．例えば [2, Example 2.2, 2.5] の連結 quandle $QS(6)$ をおく．$|QS(6)| = 6$ であり その整 homology は $H_3^Q(QS(6);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ である, 即ち 6 で annihilate されない．

4 有限連結 Alexander quandle M に対する $H_n^Q(M;\mathbb{Z})$ の捻れ

本節の目標は, 定理 2.2 を証明する事である．M を $\mathbb{Z}[T^{\pm}]$-加群とし Alexande quandle 構造を入れる．まず chain 群 $C_n^R(M;\mathbb{Z})$ を n-tuples $(U_1,\dots,U_n) \in M^n$ で生成する自由 $\mathbb{Z}$ 加群とする．∂_1 を zero map とし, $n \geq 2$ に対して次で定める．

$$\begin{aligned}\partial_n(U_1,\cdots U_n) = \sum_{1\leq i\leq n-1} \Big((-1)^i(T\cdot U_1,\dots,T\cdot U_{i-1},T\cdot U_i+U_{i+1},U_{i+2},\dots,U_n) \\ -(-1)^i(U_1,\dots,U_{i-1},U_i+U_{i+1},U_{i+2},\dots,U_n)\Big). \qquad (1)\end{aligned}$$

$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ がわかる．さらに, $C_n^H(M;\mathbb{Z})$ を, $1 \leq^{\exists} i \leq n-1$ で $U_i = 0$ となる $(U_1,\dots,U_n)$ で生成する部分加群とする．部分 complex になるので, この商 complex を $C_n^Q(M;\mathbb{Z})$ とかく．

注意 4.1. 座標変換 $x_1 := U_1 - U_2, \dots, x_{n-1} := U_{n-1} - U_n$, $x_n := U_n$ とすれば, *[1, 2]* の定義と一致する．この *naive* な変換が計算を著しく簡単にする *([4, 6]* でも扱われている*)*.

Proof. 証明方針は, ホモロジー代数でおなじみの議論である．まず M が有限 $\mathbb{Z}[T,T^{-1}]$-加群なので, 単元付 $\mathbb{Z}[T,T^{-1}]$-代数構造を入れる．連結性より $M = (1-T)M$ であるから, $1-T$ を環 M の逆元と思える．

次に $\mathrm{pt}_0 : C_n^R(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow C_n^R(M;\mathbb{Z})$ を一点写像 $M^n \longrightarrow M^n \quad (x \longrightarrow (0,0,\dots,0))$ で構成されるものとする．そこでプリズム射となる次を定める．

$$D_{n,0}^j(U_1,\dots,U_n) = \sum_{y\in M}\big(0,\dots,0,(T-1)^{-1}y, U_j + (1-T)^{-1}y, U_{j+1},\dots,U_n\big).$$

$$D_{n,+}^j(U_1,\dots,U_n) = \sum_{y\in M}\big(0,\dots,0,(1-T)^{-1}y,(T-1)^{-1}y,U_j,U_{j+1},\dots,U_n\big)$$

そうすると直接計算から次を得る事ができる:

$$\sum_{1<j<n}(-1)^j\big(\partial_{n+1}(D_{n,+}^j - D_{n,0}^j) + (D_{n-1,+}^j - D_{n-1,0}^j)\partial_n\big) = (-1)^n|M|(\mathrm{id}_{C_n^R(M;\mathbb{Z})} - \mathrm{pt}_0).$$

であるから $H_n^R(M;\mathbb{Z})$ の任意の元は $|M|$ 倍すれば一点となる。しかし $C_n^Q(M;\mathbb{Z})$ の定義から $(0,\ldots,0)$ は零元であるから、証明が終わる。 Q.E.D

5 定理 2.1 との証明方針

さて, 定理 2.1 の証明方針を述べる. 以下の節では $X = \mathbb{Z}_p[T]/(T-\omega)$ を位数 p の Alexander quandle とし, e を ω の位数とし, 固定する. まず系 3.3 で $H_n^Q(X;\mathbb{Z})$ が p 倍で消える事が即座にいえる. 従って $H_n^Q(X;\mathbb{Z})$ は有限次元 $\mathbb{Z}_p$-vector 空間となる: つまり $b_n \in \mathbb{Z}$ があって $H_n^Q(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p^{b_n}$ である. 従って $H_n^Q(X;\mathbb{Z})$ の次元を決定できれば定理 2.1 の証明が終わる. そこで $\mathbb{Z}_p$-係数の quandle **cohomology** 群 $H_Q^n(X;\mathbb{Z}_p)$ を調べる事にする.

まず cohomology 群に分解を与える. 即ち, 他の cohomology $H^{n(0)}(X)$ を与え,

$$H_Q^n(X;\mathbb{Z}_p) \cong H^{n(0)}(X) \oplus H^{n-1(0)}(X) \quad (n \geq 2)$$

を示した。紙幅の都合上この分解を認め (命題 6.1), 本稿では $H^{n(0)}(X)$ を主に紹介する (6 節). 特に, 次元 $\dim\bigl(H^{n(0)}(X)\bigr)$ を $c_n^{(0)}$ と書く事にすると, $b_n = c_n^{(0)}$ $(n \geq 1)$ である事が普遍係数定理からわかる. そこで $c_{n+2e}^{(0)} = c_{n+2}^{(0)} + c_{n+1}^{(0)} + c_n^{(0)}$ の証明すればよい.

それを示すために次のような cohomological 作用素を 6.2 節で定義する:

$$\overline{\Omega}_{n-2e+4} : H^{n-2e(0)}(X) \oplus H^{n-2e+1(0)}(X) \oplus H^{n-2e+2(0)}(X) \longrightarrow H^{n(0)}(X). \tag{2}$$

本論文で最も難しい箇所であるが, これが同型である事を示した (節 7 で解説). よって定理 2.1 の証明が終わる. この方針に則り, 以下の節で概説していく。

6 Quandle cohomology 群の生成元の記述

さて, [6] に従い $X = \mathbb{Z}_p[T]/(T-\omega)$ の quandle cochain を定義しよう. $n \geq 1$ に対して

$$C_d^n(X) = \{\sum a_{i_1,\ldots,i_n} \cdot U_1^{i_1} \cdots U_n^{i_n} \in \mathbb{Z}_p[U_1,\ldots,U_n] |\ 1 \leq i_j \leq p-1, \sum_{1 \leq h \leq n} i_h = d\ \},$$

とし $C_0^0(X) = \mathbb{Z}_p$ とする. coboundary map を次で定義する: $n \geq 1$ と $f \in C_d^n(X)$ に対し,

$$\begin{aligned}\delta_n(f)(U_1,U_2,\cdots,U_{n+1}) := &\sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{i-1} f(\omega \cdot U_1,\ldots,\omega \cdot U_{i-1},\omega \cdot U_i + U_{i+1},U_{i+2},\ldots,U_{n+1}) \\ &- \sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{i-1} f(U_1,\ldots,U_{i-1},U_i+U_{i+1},U_{i+2},\ldots,U_{n+1}),\end{aligned} \tag{3}$$

とし δ_0 を零射とする. すると $\omega^d = 1$ のとき $\delta_n(C_d^n(X)) \subset C_d^{n+1}(X)$ であり $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$ が確かめられる. この cohomology の直和と, その次元を次で略記しよう.

$$H^{n(0)}(X) := \bigoplus_{d:\ \omega^d=1} H_d^n(X), \qquad c_n^{(0)} := \dim\bigl(H^{n(0)}(X)\bigr)$$

すると次のように, 普通の quandle cohomology との対応を示す事が出来た.

命題 6.1. $H^n_Q(X;\mathbb{Z}_p)\cong H^{n-1(0)}(X)\oplus H^{n(0)}(X)$ である. 特に $\dim(H^n_Q(X;\mathbb{Z}_p))=c^{(0)}_{n-1}+c^{(0)}_n$.

従って, quandle cohomogy 群 $H^n_Q(X;\mathbb{Z}_p)$ を調べる為に $H^{n(0)}(X)$ を決定すればよい. 実際,

定理 6.2. (I) $c^{(0)}_0=c^{(0)}_{2e-1}=1$, であり $c^{(0)}_n=0$ *for* $1\le n\le 2e-2$.
(II) $c^{(0)}_n=c^{(0)}_{n-2e+2}+c^{(0)}_{n-2e+1}+c^{(0)}_{n-2e}$ *for* $n\ge 2e$.

次節では (II) の部分の証明方針を述べる. (I) はその証明の途中で注意 6.7 で示される.

6.1 準備: cocycle の記述に必要な多項式たち

cohomology 群 $H^{n(0)}(X)$ の生成元となる cocycle 全てを記述しよう. 天下りであるが多項式をいくつか準備する. まず多項式 $E^{\omega,i}_{n-2i-1}(U_{n-2i-1},U_{n-2i})\in\mathbb{Z}_p[U_{n-2i-1},U_{n-2i}]$ を定義する:

$$\big((1-\omega^{-i-1})U^p_{n-2i}+\omega^{-i}(U_{n-2i-1}+\omega^{-1}U_{n-2i})^p-(U_{n-2i-1}+U_{n-2i})^p+(1-\omega^{-i})U^p_{n-2i-1}\big)/p$$

$$\equiv\sum_{1\le j\le p-1}j^{-1}\cdot(\omega^{-i-j}-1)\cdot U^{p-j}_{n-2i-1}\cdot U^j_{n-2i}\qquad(\mathrm{mod}\ p).$$

そして, $\omega\neq-1$ に対して, この $E^{\omega,i}_{n-2i}$ の積を導入しよう:

$$E^{\omega}_{n-2e+3\le n}(U_{n-2e+3},\ldots,U_n):=\prod_{1\le k\le e-1}E^{\omega,k}_{n-2k+1}(U_{n-2k+1},U_{n-2k+2}).\tag{4}$$

もし $\omega=-1$ の場合には $E^{\omega}_{n-2e+3\le n}$ を 2 変数多項式 $E^{\omega,e-1}_{n-1}\in\mathbb{Z}_p[U_{n-1},U_n]$ とする.

また, $F^{\omega}_n(U_n,U_{n+1}),\ G^{\omega}_n(U_n,U_{n+1})\in\mathbb{Z}_p[U_n,U_{n+1}]$ を次で定める.

$$\begin{aligned}F^{\omega}_n(U_n,U_{n+1})&=\sum_{2\le j\le p-1}j^{-1}\cdot(1-\omega^{1-j})\cdot U^{p-j}_n\cdot U^j_{n+1}\qquad(\mathrm{mod}\ p)\\&\equiv\big(\omega(U_n+\omega^{-1}U_{n+1})^p+(U_n-U_{n+1})^p-(1-\omega)U^p_n\big)/p\end{aligned}\tag{5}$$

$$G^{\omega}_n(U_n,U_{n+1})=\sum_{1\le j\le p-2}j^{-1}(j+1)^{-1}\cdot(1-\omega^{-j})\cdot U^{p-j}_n\cdot U^{j+1}_{n+1}$$

$$\equiv\big((U_n+U_{n+1})^{p+1}-\omega(U_n+\omega^{-1}U_{n+1})^{p+1}-(1-\omega)U^{p+1}_n-(1-\omega^{-1})U^{p+1}_{n+1}\big)/p\qquad(\mathrm{mod}\ p).$$

6.2 Cohomological operation と cocycle の記述

以上準備した多項式を使って, この節では, まず低次の cocycle から高次の cocycle を構成する例を 3 つ与えよう. 次に, この構成をヒントに cohomological operation を定義する. 実はそれが同型となる事を紹介する (定理 6.6). 最後に, cocycle がこの 3 例に尽きる事を述べる. この節では簡単の為に, $m=n-2e+4$ とし $d'=d+2p-ep$ とおく.

例 6.3. $f_{m-3} \in C^{m-3}_{d'-p-1}(X)$ を $(m-3)$-*cocycle* とし、U_{m-3} で割れるとする．このとき,

$$f_{m\text{-}3}(U_1,\ldots,U_{m-3})\cdot U_{m-2}\cdot E^{\omega}_{m-1\le n}(U_{m-1},\ldots,U_n)\in C^n_d(X),$$

は n-*cocycle* である事が確かめられる.

例 6.4. $f_{m-4} \in C^{m-4}_{d'-2p}(X)$ を $(m-4)$-*cocycle* とする．すると次は n-*cocycle* である:

$$f_{m-4}(U_1,\ldots,U_{m-4})\cdot F^{\omega}_{m-3}(U_{m-3},U_{m-2})\cdot E^{\omega}_{m-1\le n}(U_{m-1},\ldots,U_n)\in C^n_d(X).$$

例 6.5. f_{m-2} を $(m-2)$-*cocycle* とし $f_{m-2}(U_1,\ldots,U_{m-2}) = f'_{m-4}(U_1,\ldots,U_{m-4})\cdot E^{\omega,1}_{m-3}(U_{m-3},U_{m-2})$ という形と仮定する．すると次は n-*cocycle* である:

$$f'_{m-4}(U_1,\ldots,U_{m-4})\cdot G^{\omega}_{m-3}(U_{m-3},U_{m-2})\cdot E^{\omega}_{m-1\le n}(U_{m-1},\ldots,U_n)\in C^n_d(X).$$

さて、この３例から次のように低次から高次への cocycle 間の準同型が構成できる:

$$\Omega_m : Z^{m-4(0)}_{d'-2p}(X)\oplus Z^{m-3(0)}_{d'-p-1}(X)\oplus\big(Z^{m-2(0)}_{d'-p-1}(X)\cap C^{m-4}_{d'-2p-1}(X)\cdot E^{\omega,1}_{m-3}\big)\longrightarrow Z^{n(0)}_d(X),$$

$$\Omega_m(f_{m-4},f_{m-3},f'_{m-4}\cdot E^{\omega}_{m-3}) := (f_{m-4}\cdot F^{\omega}_{m-3}+f_{m-3}\cdot U_{m-2}+f'_{m-4}\cdot G^{\omega}_{m-3})\cdot E^{\omega}_{m+1\le n}.$$

直接計算から, これは coboundary に拠らないことが解るので, Ω_m は次を誘導する:

$$\overline{\Omega}_{n-2e+4} : H^{n-2e(0)}(X)\oplus H^{n-2e+1(0)}(X)\oplus H^{n-2e+2(0)}(X)\longrightarrow H^{n(0)}(X).$$

定理 6.6. $n \ge 2e$ に対し, $\overline{\Omega}_{n-2e+4}$ は同型である.

注意 6.7. 命題 *6.1* から $H^n(X)\cong H^{n(0)}(X)\oplus H^{n-1(0)}(X)$ を思い出せば, 直和 $\overline{\Omega}_{n-1}\oplus\overline{\Omega}_n$ は普通の *quandle cohomology* $H^n_Q(X)$ 上の同型な *cohomological operation* を与える.

注意 6.8. $i<0$ に対して *cochian* 群 $C^i(X)$ を $\{0\}$ とおく．すると定理 *6.6* は任意の $n>0$ でも正しいことが示される．$C^0(X)=H^0(X)=\mathbb{Z}_p$ であるから, 従って, 定理 *6.2* の *(I)* が示される事になる: $c^{(0)}_0 = c^{(0)}_{2e-1} = 1$, *and* $c^{(0)}_n = 0$ *for* $1\le n\le 2e-2$.

定理 6.6 の証明は次節に回し, 定理 6.6 の意義を述べる．$\overline{\Omega}_m$ の構成方法より, cohomology 群 $H^{n(0)}(X)$ の次元がわかるばかりではなく, 生成元が記述できる．それを明記する為, n-cocycle の集合 $\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_n$ を n の帰納法で定義していく．まず $\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_0$ を一点 $1\in\mathbb{Z}_p$ とする．次に $0<i<2e-1$ に対し $\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_i$ を空集合とする．次に $\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_{2e-1} := \{U_1\cdot E^{\omega}_{2\le 2e-1}\in C^{2e-1}_{ep-p+1}(X)\}$ とおく．そして n の帰納法より n-cocycle の集合を次で定義する:

$$\begin{aligned}\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_n := &\{f_{n-2e}\cdot F^{\omega}_{n-2e+2}\cdot E^{\omega}_{n-2e+3\le n} | f_{n-2e}\in\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_{n-2e}\}\\ &\cup\{f_{n-2e+1}\cdot U_{n-2e+2}\cdot E^{\omega}_{n-2e+3\le n} | f_{n-2e+1}\in\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_{n-2e+1}\}\\ &\cup\{f_{n-2e+2}\cdot G^{\omega}_{n-2e+1}\cdot E^{\omega}_{n-2e+3\le n}/E^{\omega,1}_{n-2e+1} | f_{n-2e+2}\in\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_{n-2e+2}\},\end{aligned}$$

ここで $f_{n-2e+2}/E^{\omega,1}_{n-2e+1} \in C^{n-2e}(X)$ である事に注意する, それは $\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_{n-2e+2}$ の定義から帰納的にわかる. すると定理 6.6 から次の系を得る.

系 6.9. $H^{n(0)}(X)$ は $\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_n$ の元により線形独立に生成される. さらに *quandle cohomology* $H^n_Q(X;\mathbb{Z}_p)$ は $\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_n \cup \mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_{n-1}$ によって線形独立に生成される, ここで $\mathrm{Coc}^{\omega,(0)}_{n-1}$ を $H^n_Q(X;\mathbb{Z}_p)$ の元と自然に思える事が出来るが詳細はプレプリント *[8]* を御参考下さい.

7 定理 6.6 の証明

証明のアイディアは [6] に基づき, それを一般の n に modify したものである. この節では $n \geq 2e$ とし $\omega^d = 1$ を固定する。定理 6.6 を直接示すのは難儀なので分解して考える. 下記の準同型 (6) を述べよう. まず次の coboundary map δ_{n-2i} の固有空間を考える

$$M^i_n(X) := \{g_{p-1}(U_1,\ldots,U_{n-2i})\cdot T^{p-1}_{n-2i+1} | g_{p-1} \in C^{n-2i}_{d-ip}(X),\ \delta_{n-2i}(g_{p-1}) = (-1)^n(1-\omega^{-i})\cdot g_{p-1}\}$$

そして次の coboudary で割った商空間を考える.

$$\overline{M}^i_n := M^i_n/\mathrm{Im}(\delta_{n-2i}) \cap M^i_n$$

$f \in C^n_d(X)$ を n-cocycle とする。$f_1 \in C^{n-1}_{d-p}(X)$ を f の $U^{p-1}_{n-1}\cdot U^1_n$ の係数とする. すると cocycle 条件から $\delta_{n-2}(f_1) = (-1)^n(1-\omega^{-1})\cdot f_1$ が確かめられるので, 準同型

$$\phi : Z^n_d(X) \longrightarrow M^1_n(X) \qquad f(U_1,\ldots,U_n) \longmapsto f_1(U_1,\ldots,U_{n-2})\cdot U^{p-1}_{n-1} \tag{6}$$

を与える. すると次が示される[*4].

命題 7.1. ϕ は準同型 $\bar{\phi} : H^{n(0)}_d(X) \longrightarrow \overline{M}^1_n(X)$ を誘導する。さらに $\bar{\phi}$ は同型である. この逆写像 $M^1_n \longrightarrow Z^n_d(X)$ $(g_{p-1}\cdot T^{p-1}_{n-1} \mapsto g_{p-1}\cdot E^{\omega,1}_{n-1})$ から与えられる.

定義から $M^0_n(X) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} Z^n_d(X)$ より, 命題 7.1 は δ_n の weight を一つ shift したと解釈できる.
次に $M^i_n(X) \longrightarrow M^{i-1}_n(X)$ を与えよう. $g_{p-1}(U_1,\ldots,U_{n-2i})\cdot U^{p-1}_{n-2i+1} \in M^i_n(X)$ をおく. そこで g'_{p-1} を g_{p-1} の $U^{p-1}_{n-2i-1}U^1_{n-2i}$ の係数とする. 条件 $\delta_{n-2i}(g_{p-1}) = (-1)^n(1-\omega^{-i})\cdot g_{p-1}$ から $\delta_{n-2i-2}(g'_{p-1}) = (-1)^n(1-\omega^{-i-1})\cdot g'_{p-1}$ が確かめられるので, 次の準同型をえる.

$$\Theta_i : M^i_n(X) \longrightarrow M^{i+1}_n(X) \quad \big(g_{p-1}(U_1,\ldots,U_{n-2i})\cdot U^{p-1}_{n-2i+1} \mapsto g'_{p-1}(U_1,\ldots,U_{n-2i-2})\cdot U^{p-1}_{n-2i-1}\big)$$

命題 7.2. $1 \leq i \leq e-2$ に対して. Θ_i は準同型 $\overline{\Theta}_i : \overline{M}^i_n(X) \longrightarrow \overline{M}^{i+1}_n(X)$ を誘導する。さらに $\overline{\Theta}_i$ は同型である. この逆写像 $M^{i+1}_n(X) \longrightarrow M^i_n(X)$ は $(g_{p-1}\cdot T^{p-1}_{n-2i-1} \mapsto g_{p-1}\cdot E^{\omega,i}_{n-2i-1}(U_{n-2i-1},U_{n-2i})$ から与えられる.

最後に, 定理 6.6 を示すためには, 下記の写像 (7) が同型となる事を示せばよい. それにはまず、低次の cocycle から, $\delta_m(g) = (-1)^n(1-\omega)\cdot g$ を満たす多項式 g を構成すればよい。例 6.3, 6.4, 6.5, を参考に次の 3 例はそれを満たす.

[*4] $n=3$ のときは望月氏の論文 [6, Lemma 3.17] により示され, 命題 7.1 はその modification である.

$$\begin{cases} f_{m-3} \in C^{m-3}_{d'-p-1}(X) \text{ が } (m-3)-cocycle, & \Longrightarrow\ g := f_{m-3}\cdot U_{m-2} \\ f_{m-4} \in C^{m-4}_{d'-2p}(X) \text{ が } (m-4)-cocycle, & \Longrightarrow\ g := f_{m-4}\cdot F^{\omega}_{m-3} \\ f'_{m-4}\cdot E_{m-3}(U_{m-3},U_{m-2}) \text{ が } n-cocycle, & \Longrightarrow\ g := f'_{m-4}\cdot G^{\omega}_{m-3} \end{cases}$$

従って, 次の写像が構成されたことになる:

$$\Phi_m : Z^{m-4(0)}_{d'-2p}(X) \oplus Z^{m-3(0)}_{d'-p-1}(X) \oplus \left(Z^{m-2(0)}_{d'-p-1}(X) \cap C^{m-4}_{d'-2p-1}(X)\cdot E^{\omega,1}_{m-3}\right) \longrightarrow M^{e-1}_n. \quad (7)$$

命題 7.3. 準同型 Φ_m は $\overline{\Phi}_m : H^{n-2e(0)}(X) \oplus H^{n-2e+1(0)}(X) \oplus H^{n-2e+2(0)}(X) \longrightarrow \overline{M}^1_n(X)$ を誘導する。さらに $\overline{\Phi}_m$ は同型である.

以上の三つの命題 7.1, 7.2 ,7.3 をまとめると、構成から,

$$\overline{\Omega}_{n-2e+4} = (\overline{\phi})^{-1} \circ \overline{\Theta}_1^{-1} \circ \cdots \circ \overline{\Theta}_{e-1}^{-1} \circ \overline{\Phi}_m$$

となり、結局、定理 6.6 が証明された事になる。是節の議論を要約すれば次の図となる.

$$\begin{tikzcd}
H^n_Q(X) \arrow[ddr, "F^{\omega}"] & & & & & & & \\
\bigoplus & & & & & & & \\
H^{n+1}_Q(X) \arrow[r, "U_{n+2}"] & \overline{M}^1_n \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & \overline{M}^i_n \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left, "{E^{\omega}_i(U_{n-2i},U_{n-2i+1})\ \text{を掛ける}}"] & \overline{M}^{i+1}_n \arrow[l, bend left, "{U^1_{n-2i}\cdot U^{p-1}_{n-2i+1}\ \text{の係数を見る}}"] \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & \overline{M}^{e-1}_n \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left, "{E^{\omega}(U_{n-2},U_{n-1})\ \text{を掛ける}}"] & H^{n+2e}_Q(X) \arrow[l, bend left, "{U^1_{n-1}\ \text{の係数を見る}}"] \\
\bigoplus & & & & & & & \\
H^{n+2}_Q(X) \arrow[uur, "G^{\omega}/E^{\omega}"'] & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

参考文献

[1] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.

[2] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Geometric interpretations of quandle homology*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001) 345–386.

[3] P. Etingof, R. Guralnick, A. Soloviev, *Indecomposable set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation on a set with a prime number of elements* , J. Algebra **242** (2001) 709-719.

[4] R. A. Litherland, S. Nelson,*The Betti numbers of some finite racks,* J. Pure Appl. Algebra **178**, 2003, 187-202.

[5] T. Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J.Pure Appl. Algebra **179** (2003) 287–330.

[6] T. Mochizuki, *The 3-cocycles of the Alexander quandles* $\mathbb{F}_q[T]/(T-\omega)$, Algebraic and Geometric Topology. **5** (2005) 183–205.

[7] M. Niebrzydowski, J. H. Przytycki. *Homology of dihedral quandles*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009) 742–755.

[8] T.Nosaka, *On quandle homology groups of Alexander quandles of prime order*, preprint, RIMS-1680 ,2009.

Lens surgeries on $k^2 \pm k + n = 0\ (p)$

丹下 基生
(京都大学数理解析研究所)
JSPS Fellow(PD)*

概 要

私はレンズ空間手術のテーマでは次のような問題意識をもって研究をしている。
1)[結び目の判定条件] どのような結び目がデーン手術によってレンズ空間を生み出すか?
2)[レンズ空間の判定条件] レンズ空間がいつ S^3 内の結び目のデーン手術から得られるか?
2')[デーン手術の variation の分類] また、他にそのレンズ空間を作る結び目はないか?
3)[ホモロジー球面上のレンズ空間手術の判定条件] また S^3 に限らず一般のホモロジー球面でデーン手術を作るものは何か?

これまで 1) の候補となるものは Berge らによって得られていた。この研究集会では 2) および 3) に関する問題に対する部分的解答を発表させていただいた。

1 レンズ空間手術

レンズ空間手術についての基本事項をまとめておく。Y をホモロジー球面とする。このホモロジー球面内の結び目 K をとる。Y から K の管状近傍を取り除き、管状近傍 $\mathrm{nbd}(K)$ と同相なソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ を埋め戻すことによって新しい多様体を得る。ただ、この時の埋め戻す写像は以下に指定する。貼り付け写像を $\phi : S^1 \times \partial D^2 \to \partial[Y - \mathrm{nbd}(K)]$ とすると $\phi(\mathrm{pt} \times \partial D^2) = p[\mu] + [\lambda]$ 満たすようにする。これを傾きが整数のデーン手術という。ここで μ, λ を結び目の管状近傍の境界にいる meridian と longitude を表す。

このようなデーン手術によってホモロジー球面はホモロジーレンズ空間に変化する。このホモロジーレンズ空間がいつ本当のレンズ空間に一致するかという問題がレンズ空間手術の問題といえる。この問題は 1 回のデーン手術によってレンズ空間を作るための条件を与えるものでもある。任意のレンズ空間（及び任意の 3 次元多様体）は何回かデーン手術を行うことによって得られることに注意する。

上記の定義で ϕ の像を $p[\mu] + q[\lambda]$ としておけば傾き p/q の手術が得られる。しかし傾きを有理数に広げてしまうと自明結び目の p/q 手術でレンズ空間 $L(p, q)$ が作れてしまうし、例え自明結び目を除いて考えても知られている例を除いてほとんどが整数手術に帰着されてしまう（Culler-Gordon-Luecke-Shalen の cyclic surgery theorem）という結果があるからである。また、整数にしておけばコボルディズムを考えることで滑らかな 4 次元多様体への応用もできる。これらが傾きを整数に限って考える理由である。

またレンズ空間 $L(p, q)$ の基本群およびホモロジー群は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であるがその同相類は基本群だけでは決まらない。($L(p,q) \cong L(p,q') \Leftrightarrow q = q' \mod p$ または $qq' = 1 \mod p$) これは他の 3 次元多様体とは趣を異にしている。例えば、ザイフェルト多様体のように一般に基本群が無限群となる多様体はその基本群の複雑さをその特徴として用いて（例としてリー群への準同型を用いたりして）判定ができたりすることがある。そのような点でレンズ空間は困難はあるが、元々の多様体の記述がシンプル（種数 1 のヒーゴール分解をもつなど）な分シンプルに判定ができるはずである。

定義 1 $Y_p(K) = L(p, q)$ を満たす (Y, K, p) 全体の集合を $\mathcal{L}$ とする。$p_1 : \mathcal{L} \to \{\textit{homology spheres}\}$ を第一成分への射影とする。このとき、$p_1^{-1}(Y)$ を $\mathcal{L}_Y$ とかく。

*この研究は日本学術振興会からの補助を受けています (21-1458)。

$Y_p(K)$ には貼り戻した $S^1\times D^2$ のコアサークルを $\tilde{K}$ として、デーン手術の双対結び目という。一方、$Y_p(K)$ があるレンズ空間 $L(p,q)$ とすると、$L(p,q)$ の種数 1 のヒーゴール分解を $L(p,q)=V_1\cup V_2$ としたときに、V_i のどちらかのコアサークルを c とおく。このとき、$\tilde{K}$ と c をホモロジークラスと考えることで、

$$[\tilde{K}]=k[c]$$

となる整数 $k\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を定義できる。($[\tilde{K}],[c]$ は $H_1(L(p,q))$ の generator) このとき、これらのサークルには向きを入れていないので $\pm k$ の不定性があり、V_1,V_2 の選び方によって k は $k^{-1} \bmod p$ となる。よってホモロジー球面の手術によって $Y_p(K)=L(p,q)$ が実現されたとき、集合 $\mathfrak{k}(p,k):=\{k,-k,k^{-1},-k^{-1}\}\subset\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義される。またレンズ空間内の linking を考えることによって $k^2=q \mod p$ が成り立つことも注意しておく。まとめると、$\mathcal{K}_p:=\{\mathfrak{k}(p,k)\subset\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}|k\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\}$ とおくと

$$\pi:\mathcal{L}\ni(Y,K,p)\mapsto\mathfrak{k}(p,k)\in\mathcal{K}_p$$

としてレンズ空間手術のデータが取り出せた。p_i を (Y,K,p) の第 i 成分への射影とする。

2 Bergeの例

次に Berge の例を考える。

定義 2 (Berge [2]) *Y をヒーゴール種数が 2 のホモロジー球面とし、そのヒーゴール分解を $U_1\cup U_2$ とする。$K\subset Y$ が doubly primitive knot であるとは K がヒーゴール曲面 $U_1\cap U_2$ の上に乗っていて、K が U_i へ誘導する基本群の元が rank 2 の自由群 ($\pi_1(U_i)\cong F_2$ である) の生成元の 1 つになっているときをいう。*

定理 1 (Berge [2]) *(Y,K) をホモロジー球面 Y 上のある doubly primitive knot とする。このとき、ある整数 p が存在して、$(Y,K,p)\in\mathcal{L}$ となる。この整数 p はヒーゴール曲面が、$\partial nbd(K)$ に構成する傾きである。*

次に simple 結び目の定義をする。

定義 3 (Berge [2]) *$L(p,q)$ の中の結び目 L が simple であるとは、L が種数 1 のヒーゴール分解 $V_1\cup V_2$ の各 V_i の meridian disk D_i ($V_i\setminus D_i\cong$3-ball) に proper(境界は ∂D_i に含まれる) かつ自己交差を持たない 2 つの arc c_1,c_2 の和集合 $c_1\cup c_2$ で構成されるものをいう。*

命題 1 ([2]) *定理 1 で構成したレンズ空間の双対結び目 $\tilde{K}$ は simple knot に isotopic である。*

simple 結び目の isotopy 類はそのホモロジー類で決まることは簡単にわかる。よって

$$\{\mathcal{K}_p\}_p \overset{1\text{ to }1}{\leftrightarrow} \{\text{doubly primitive knots}\}$$

であり、π と逆向きの写像

$$s:\{\mathcal{K}_p\}_p\to\mathcal{L}\quad \mathfrak{k}\mapsto(Y,K,p)\quad (Y\text{ は doubly primitive knot surgery})$$

が得られる。定義から $\pi\circ s=\mathrm{id}$ である。

3 必要条件

ここで結び目 (Y,K) がある整数 p に対して $(Y,K,p)\in\mathcal{L}$ を満たすための必要条件を 3 つ紹介する。

定理 2 (Kadokami-Yamada [3]) *$(Y,K,p)\in\mathcal{L}$ の Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ は、*

$$\Delta_K(t)=\frac{(t^{kg}-1)(t-1)}{(t^k-1)(t^g-1)}\quad \mathbb{Z}[t,t^{-1}]/(t^p-1)$$

を満たす。

定理 3 (Ozsváth-Szabó [6]) $(S^3, K, p) \in \mathcal{L}_{S^3}$ に対して

$$\Delta_K(t) = (-1)^m + \sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}(t^{n_j} + t^{-n_j}), \qquad (0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_m = d)$$

が成り立つ。

この定理は S^3 を $\Sigma(2,3,5)$ に変えても成り立つ。

定理 4 (Ozsváth-Szabó [4]) $(S^3, K, p) \in \mathcal{L}$ は、*i-th Turaev torsion* に対して $\tau_i(S^3_0(K)) \geq 0$ が成り立つ。

この条件は $\Sigma(2,3,5)$ に対しては一般に成り立たない。次に予想を述べる。

4 予想

予想 1 (Berge conjecture) $Y = S^3$ もしくは $\Sigma(2,3,5)$ とする。$(Y, K, p) \in \mathcal{L}_Y$ とすると (Y, K) は *doubly primitive knot* に限る。

この予想の S^3 の場合は Berge が予想しており、定理 1 の逆の主張である。一般にデーン手術 $s(\mathcal{K})$ の結び目 $K \subset Y$ はファイバー結び目であることが Ozsváth-Szabó [6] によって知られている。ファイバー結び目以外からもレンズ空間を得られることから Y が上記のもの以外では $\mathfrak{k} \in \mathcal{K}_p$ に対して $\pi^{-1}(\mathfrak{k})$ は一般には複数存在する。有限かどうかもまだ分からない。

Berge は [2] で doubly primitive knot のリストを作成している。下の表はそのリストに基づいて Rasmussen が [7] で書き直したものである。

type	condition	type	condition
(I,II)	$p = ik \pm 1 (k^2)$; $\gcd(i,k) = 1$ or 2	(VII,VIII)	$k^2 \pm k \pm 1 = 0\ (p)$
(III)	$p = \begin{cases} \pm(2k-1)d\ (k^2); & d \mid k+1\ \ \frac{k+1}{d} : \text{odd} \\ \pm(2k+1)d\ (k^2); & d \mid k-1\ \ \frac{k-1}{d} : \text{odd} \end{cases}$	(IX)	$p = 22j^2 + 9j + 1\ (j \in \mathbb{Z})$
(IV)	$p = \begin{cases} \pm(k-1)d\ (k^2); & d \mid 2k+1 \\ \pm(k+1)d\ (k^2); & d \mid 2k-1 \end{cases}$	(X)	$p = 22j^2 + 13j + 2,\ (j \in \mathbb{Z})$
(V)	$p = \begin{cases} \pm(k+1)d\ (k^2); & d \mid k+1\ d : \text{odd} \\ \pm(k-1)d\ (k^2); & d \mid k-1\ d : \text{odd} \end{cases}$		

このリストが主張することは、$\{\mathfrak{k}(p,k) \mid (p,k)$ がリストに含まれる $\} \subset s \circ \pi(\mathcal{L}_{S^3}) \subset \mathcal{L}_{S^3}$ であり、次が一般に予想されている。

予想 2 $(S^3, K, p) \in \mathcal{L}_{S^3}$ ならば $\pi(S^3, K, p)$ は上のリストのどれかに含まれる。

ここでまとめると、

$$\boxed{(S^3, K)\text{: doubly primitive knot}} \Rightarrow \boxed{(S^3, K, p) \in \mathcal{L}} \text{ (Berge's work)}$$

$$\boxed{(S^3, K)\text{: doubly primitive knot}} \Leftarrow \boxed{(S^3, K, p) \in \mathcal{L}} \text{ (Berge's conj.)}$$

$$\boxed{(p,k) \in \{\text{(I)-(X)}\}} \Rightarrow \boxed{s(\mathfrak{k}(p,k)) \in \mathcal{L}_{S^3}} \Rightarrow \boxed{(p,k)\text{ は定理 2,3,4 を満たす}}$$

ここでもし、$\boxed{(p,k)\text{ は定理 2,3,4 を満たす}} \Rightarrow \boxed{(p,k) \in \{\text{(I)-(X)}\}}$ が成り立つならば、この 3 つの条件は同値になる。特に、上記のリスト S^3 上の doubly primitive knot の完全なリストであることになる。つまり予想 2 が解決される。また、上記のリストはレンズ空間 $L(p,q)$ が S^3 上の結び目のデーン手術から得られるための完全な判定条件にもなる。ここで、予想 2 を代数的 *Berge conjecture* と呼ぶ。この予想は Ozsváth-Szabó が [6] の中で Conjecture 1.12 と予想しているものと同じものである。この予想が解けたとしても $\mathcal{L}_{S^3}$ にお

いて $\pi^{-1}(\mathfrak{k}(p,k)) = s(\mathfrak{k}(p,k))$ が成り立つか（doubly primitive knot が S^3 を生む唯一つの結び目であるかどうかは保証できない。

また、筆者は結び目のトポロジー IX,X で講演させていただいたように S^3 ではなく $\Sigma(2,3,5)$ 上のレンズ空間の手術 $s(\mathfrak{k}(p,k)) \in \mathcal{L}_{\Sigma(2,3,5)}$ となる $\mathfrak{k}(p,k)$ のリスト (A_1)-(K) を作成した。[12, 9] をみよ。このとき次が成り立っている。

$$\boxed{(p,k) \in \{(\mathrm{I})\text{-}(\mathrm{X}) \text{ or } (\mathrm{A}_1)\text{-}(\mathrm{K})\}} \Rightarrow \boxed{s(\mathfrak{k}(p,k)) \in \mathcal{L}_{S^3} \cup \mathcal{L}_{\Sigma(2,3,5)}} \Rightarrow \boxed{(p,k) \text{ は定理 2,3 を満たす}}$$

ゆえに、$\boxed{(p,k) \text{ は定理 2,3 を満たす}} \Rightarrow \boxed{(p,k) \in \{(\mathrm{I})\text{-}(\mathrm{X}),(\mathrm{A}_1)\text{-}(\mathrm{K})\}}$ が成り立つならば、(A_1)-(K) は $\Sigma(2,3,5)$ 上の doubly primitive knot の完全なリストであり、$L(p,q)$ が $\Sigma(2,3,5)$ の手術から得られるための完全な判定条件になる。

この方向の命題をある条件で証明することで分類が正しいことを確かめることがここで報告するメインの内容である。主定理とその証明を次で証明する。

5 主定理とその証明

主定理のために準備をする。$0 < k' < p$ を k の $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ での逆元とする。このとき、$mp = kk' - 1$ を満たす整数 m が存在する。ここで、$c = \frac{(h+1-p)(h-1)}{2}$ とおくと、定理 2 の左辺を展開係数は

$$\tilde{a}_i = -m + \#\{j \in [1,k']_{\mathbb{Z}} | [qj - ki - c]_p \in [1,k]_{\mathbb{Z}}\}$$

と計算される。ここで、$[1,x]_{\mathbb{Z}}$ は $1,x$ の間の整数の集合を表し、$[\alpha]_p$ は整数 α を 0 から $p-1$ の間に簡約した値とする。ここで $\bar{g} = k'(c-q)+1$ とおき、$A(n_1,n_2,n_3) = \tilde{a}_{-\bar{g}+n_1k+n_2k'+n_3}$ とおく。この係数 $\tilde{a}_i$ は Alexander polynomial $a_i(K)$ を cyclic に $\mathbb{Z}$ に拡張したものと考える。こうしたことは Ozsváth-Szabó の不等式 $2g(K)-1 \leq p$ から自然にできる。ここで、$g(K)$ は K の種数とする。このとき、$k_1 = p - k'$ として、

$$\begin{aligned} & A(n_1,n_2,n_3) - A(n_1,n_2-1,n_3) = E_{k'}(n_2q' + n_3k' + n_1 + 1) - E_{k'}(n_2q' + (n_3-1)k' + n_1 + 1) \\ = \ & E_{k_1}(n_2q' - (n_3-2)k_1 + n_1 + 1) - E_{k_1}(n_2q' - (n_3-1)k_1 + n_1 + 1) \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つ。ここで、$E_{k'}(y) = \begin{cases} 1 & [y]_p \in [1,k']_{\mathbb{Z}} \\ 0 & [y]_p \notin [1,k']_{\mathbb{Z}} \end{cases}$ である。

定理 5 (主定理) $\mathfrak{k} \in \mathcal{K}$ に対して、$k \in \mathfrak{k} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が $2k^2 + k + 1 = 0\ (p)$ を満たすとする。この (p,k) が定理 2,3 の条件を満たすとする。このとき、(p,k) は上記のリストの (I),(IX),(X) もしくは、[12] の (A_1) のどれかに含まれる。

証明は途中まで $ak^2 + bk + 1 = 0\ (p)$ を満たす (p,k) に対して式変形をする。

証明 $ak^2+bk+1 = 0\ (p)$ が成り立つとする。ここで、a,b は正の整数とする。このとき、$ak^2+bk+1-np = 0$ を成り立つものとする。よって、整数条件から $b^2 - 4a(1-np) = X^2$ となる整数とする。$p = \frac{X^2-D}{4an}$ とする。ここで $D = b^2 - 4a$ とおく。さらに、$X = 2anJ + \gamma$ とおく。$J \geq 0, 0 \leq \gamma < 2an$ となる整数である。よって、$p = anJ^2 + \gamma J + \frac{\gamma^2 - D}{4an}$ が成り立つ。$k = \frac{-b+X}{2a} = nJ + \frac{\gamma - b}{2a}, k_1 = ak + b = anJ + \frac{\gamma+b}{2}$ とおくと、$kk_1 = -1\ (p)$ を満たす。さらに、$q' = abnJ + \frac{b(\gamma+b)}{2} - a$ である。

ここで $b=1$ と仮定する。公式 (1) を適用させると、

$$A(a-1,n_2,1) - A(a-1,n_2-1,1) = E_{k_1}(n_2q' + k_1 + a) - E_{k_1}(n_2q' + a) \tag{2}$$

が成り立つ。ここで、(2) が -1 であることは、ある整数 ℓ が存在して、

$$p\ell \leq n_2q' + a < p\ell + k_1 \Leftrightarrow (n_2-1)q' \leq p\ell < n_2q' + a \Leftrightarrow n_2 = \left[\frac{p\ell}{q'}\right] + 1 \text{ or } n_2 = 0, -q, \cdots, -(a-1)q\ (p)$$

が成り立つことと同値である。また 1 であるのは

$$n_2 = \left[\frac{p\ell}{q'}\right] \text{ and} \neq 0, -q, \cdots, -(a-1)q\ (p) \text{ or } n_2 = -1, -q-1, \cdots, -aq-1 = k, k-q, \cdots, k-(a-1)q\ (p)$$

特に、$\left[\frac{pn}{q'}\right]=k+1$ が成り立つ。

$A(n)=A(a-1,n,1)$ とおく。ここで $a=2$ として、上の性質と定理 3 において、Alexander polynomial の係数の絶対値が 1 以下であることを用いると A の値は以下のように決定できる。

ここで q は k^2 を p で余りをとったものであり、$\frac{2p-k-1}{2}$ と $\frac{p-k-1}{2}$ と 2 通り可能性があるが、前者は Alexander polynomial の係数の絶対値が 1 を超えさせてしまうので $q=\frac{p-k-1}{2}=nJ^2+\frac{\gamma-n}{2}J+\frac{\gamma^2-D}{16n}-\frac{\gamma-b+4}{8}$ である。かつ n は奇数である。

左から $A(-1),A(0),A(1),\cdots,$ となる数列である。2 行目は $A(k-1),A(k),A(k+1),\cdots,$ となる数列である。

1	0	-1	-1	$\cdots$	-1	0	-1	-1	$\cdots$	-1	0	-1	$\cdots$	$\cdots$
-1	0	1	0	$\cdots$	0	0	1	0	$\cdots$					

さらに $A(p-q-1),A(p-q),A(p-q+1),\cdots,$ と $A(p-q+k-1),A(p-q+k),A(p-q+k+1),\cdots$ も

1	0	-1	-1	$\cdots$	-1	0	-1	-1	$\cdots$	-1	0	-1	$\cdots$	$\cdots$
-1	0	1	0	$\cdots$	0	0	1	0	$\cdots$					

のような数列である。この数列の特徴は $A(p-jq),A(p-jq+1),\cdots,A(p-jq+k)$ において $A(\left[\frac{xp}{q'}\right])$ での値が 0 となりそれ以外では -1 である。ここで $\left[\frac{p}{q'}\right]=J$ であるので、$J>1$ としておかなければならない。

また、数列 $A(k+1),A(k+2),\cdots,A(p-q-1)$ と $A(p-q+k+1),A(p-q+k+2),\cdots,A(p-1)$ は

1	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	$\cdots$

となる数列で、同じように $A(\left[\frac{xp}{q'}\right])$ と書けるところで 1 でありそれ以外では 0 を成す。

ここで、$\gamma=1$ のとき、$\frac{\gamma^2-D}{8n}=\frac{8}{8n}$ が整数にならなければならないから $n=1$ となり、$p=2J^2+J+1,k=J$ であり、この場合 $(2J+1,J)$-トーラス結び目の p-surgery で得られる。また、$n=1$ とすると $2k^2+k+1=p$ であり、$(2k+1,k)$-トーラス結び目の p-surgery で得られる。よって、分類すべきなのは $\gamma\geq 5$ かつ、$n\geq 3$ であることがわかる。($\because\gamma$ は奇数であり、p の定数項の整数性から 4 で割って 1 余る自然数を満たすからである。)

今任意の整数 m に対して、

$$m(k+1)q'+2m=mpn$$

が成り立つが、$0\leq m\leq nJ$ のとき、$2m<q'$ である。よって $\left[\frac{mnp}{q'}\right]=m(k+1)$ が成り立つ。

また、$\left[\frac{p}{k}\right]=2J,2J+1$ であるから、同じように (i,j) 成分に $A(ik+j-1)$ の値を入れて表にすると、

1	0	-1	-1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$							
-1	0	1	0	$\cdots$	$\cdots$								
$\cdots$	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$								
$\cdots$	0	0	$\ddots$	$\ddots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$				
			0	0	1	0	$\cdots$		-1	0	-1	$\cdots$	$\cdots$
				$\cdots$	-1	0	-1	$\cdots$	-1	0	-1	$\cdots$	$\cdots$

となる。ここで、この表を上から下へ縦に読むことで、Alexander polynomial の係数 $a_i(K)$ を順番に読んでいることに相当することに注意する。こうして眺めてみると定理 3 の条件は（曖昧な言い方であるが）多くの場所で成り立っていることもわかる。次にいつこの条件が崩れるかについてみていくことにする。

$\left[\frac{p-q}{k}\right] = J + \left[\frac{\gamma+2n+1}{4n}\right]$ である。よって、$4n \leq \gamma + 2n + 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq \gamma$ のとき、$\left[\frac{p-q}{k}\right] = J + 1$ となる。このとき、下の $A(i + jk)$ の表

$j\backslash i$	-1	0	1	$\cdots$	$J-1$	J	$J+1$	$J+2$	$\cdots$	
0	1	0	-1	$\cdots$	-1	0	-1	-1	-1	$\cdots$
1	-1	0	1	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$		
$\vdots$			$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$		0	$\ddots$	0	$\cdots$
$\vdots$				0	1	0	0	$\cdots$		
J				0	0	1	0	$\cdots$		
$J+1$				0	0	0	1	0	$\cdots$	
$J+2$				-1	-1	-1	-1	0	-1	$\cdots$

となる。定理 3 から a_i の 0 以外の係数は i が増えるごとに -1 と 1 が交互に現れる。しかし、今、上の表のうちで $(i, j) = (J + 1, 1)$ から $(i, j) = (J + 1, J + 1)$ まで縦にみると、0 を除くと 1 と 1 が並んでいる。これは定理 3 の条件に合わないが、今 $a_i(K)$ を周期的に並べていることを思い出すと、この部分列は K の種数を g として $a_g(K), a_{g+1}(K), \cdots, a_{p-g}(K)$ でしかあり得ない。よって、この場合、

$$-\bar{g} + (J + k\frac{J+2}{2})k' + k + 1 = \frac{p}{2}\ (p)$$

が成り立たなければならない。これをといて、$n = 7$,$\gamma = 21$ が得られる。つまり、$p = 14J^2+21J+8, k = 7J+5$ である。これは [12] での分類の A_1 に相当する。

次に、$\gamma + 2n + 1 < 4n$ であるとする。つまり、$\left[\frac{p-q}{q'}\right] = J$ であるとする。ここで、$-nJ \leq m$ のとき、$-q' < 2m$ であるから、このような m に対して $\left[\frac{(nm+1)p}{q'}\right] = m(k + 1) + J$ が成り立つ。また、$\left[\frac{p}{k}\right] = \left[2J + \frac{\gamma+1}{2n} + \frac{1}{kn}\right] = 2J + \left[\frac{\gamma+1}{2n}\right] = 2J$ が成り立つ。次に $A(i + jk)$ の表で、$j = 0$ の部分を一番下におき、$-1 \leq i$ と $j < 0$ とする。このとき、定理 3 を満たさない状況をみると

$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$-J$	0	1	0	$\cdots$	$\cdots$						
$-J+1$	-1	-1	0	-1	-1	$\cdots$	-1	-1	-1	0	-1
$-J+2$			0	1	0	$\cdots$			0	$\vdots$	1
$\vdots$				$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$	0
-2				$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1		0	0	0	$\cdots$	0	1	0	0	0	0
0	1	0	-1	-1	$\cdots$	0	-1	0	-1	-1	-1
j/i	-1	0	1	2	$\cdots$	$J-2$	$J-1$	J	$J+1$		$\cdots$

のようになる。$(J + 1, 0)$ から $(J + 1, -J + 1)$ の間が -1 と -1 がいくつかの 0 をまたいで隣り合っている。このような状況がないためには

$$\left[\frac{n}{\frac{\gamma+3}{4}}\right] > \frac{2n - \gamma - 1}{4}$$

を満たさなければならない (ここは紙面の都合上割愛)。式変形をして、

$$n \leq \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 3)}{2(\gamma - 5)}$$

が成り立つ。n は奇数、より、γ は 4 で割って 1 余る奇数つまり、$\gamma = 2n - 5, 2n - 9$ を個別に計算すると、どれも条件を満たさない。ゆえに、

$$\frac{\gamma + 13}{2} \leq n \leq \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 3)}{2(\gamma - 5)}$$

を満たす (γ, n) を見つければよいがこの不等式から即座に $\gamma \leq 17$ が成り立ち、$\frac{\gamma^2+7}{8n}$ が整数となる n とのペアを探すことで、$(\gamma, n) = (9, 11), (13, 11)$ だけが定理 3 の条件を満たす。ゆえにこれは Berge のリストの (IX) と (X) に対応することがわかる。□

この証明では途中で $b = 1$ と $a = 2$ と限ったが一般の $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$ に対しては多少繁雑になるが同じような証明を試みることはできるはずである。

6 謝辞

このような研究集会で講演をさせていただきましたことを、谷山公規氏、花木良氏に感謝いたします。
本研究の一部は特別研究員奨励費 (21-1458) によっています。

7 結び目の数学 I での [13] の講演への補足

昨年度の結び目の数学での講演 "レンズ空間から得られるホモロジー球面たち III" へのコメント

問題 1 ([13]) 双曲構造をもつホモロジー球面にも *doubly primitive knot* が存在するか？

解答 存在する。$L(31, 10), k = 16$ は双曲構造をもつ多様体上の doubly primitive knot の 31-Dehn surgery をして得られる。

他にも $L(43, 10)$ や $L(55, 31)$ はぞれぞれ Mazur type の homology sphere $W^+(0, 6)$ $(\lambda = -2)$ および、$W^+(0.9)$ $(\lambda = -2)$ の doubly primitive knot に沿った手術によって得られる。この記号は [1] による。特にこれらの homology sphere のヒーゴール種数は 2。

レンズ空間の simple knot を手術してできる多様体の双曲構造はどのような特徴をもつか？

参考文献

[1] S. Akbulut and R. Kirby, *Mazur manifolds*, Michigan Math. J. 26 (1979), no. 3, 25–284

[2] J. Berge, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, unpublished manuscript.

[3] T. Kadokami and Y. Yamada, *A deformation of the Alexander polynomials of knots yielding lens spaces*, Bull. of Austral. Math. Soc. 75 (2007), no. 1 75–89

[4] Ozsváth Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. 173 (2003), no. 2, 179–261.

[5] P. Ozsváth, Z. Szabó, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2) 159 (2004), no. 3, 1027–1158.

[6] P. Ozsváth, Z. Szabó, *On knot Floer homology and lens space surgeries*, Topology **44** (2005), 1281–1300.

[7] J.Rasmussen, *Lens space surgeries and L-space homology spheres*, arXiv:0710.2531

[8] M. Tange, *Ozsváth-Szabó's correction term of lens surgery*, Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society volume 146, issue 01, pp. 119–134

[9] M.Tange, *Lens spaces given from L-space homology spheres*, arXiv:0709.0141, Experimental Mathematics 18 (2009), no.3, 285–301

[10] M.Tange, *On the non-existence of L-space surgery structure*, arXiv:0707.0197

[11] 丹下 基生, ホモロジー球面から生成されるレンズ空間たちについて *I*, 「結び目のトポロジー IX」報告集

[12] 丹下 基生, ホモロジー球面から生成されるレンズ空間たちについて *II*, 「結び目のトポロジー X」報告集

[13] 丹下 基生, ホモロジー球面から生成されるレンズ空間たちについて *III*, 「結び目の数学」報告集

On the knot Floer homology of some satellite knots

Yuanyuan Bao *

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

In this note, we make use of some ideas in [3] to study the knot Floer homology of a class of t-twisted satellite knots $K_t^{P_r}$, with companion knot $K \subset S^3$ and pattern knot P_r, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $t \in \mathbb{Z}$. We prove that the knot Floer homology of $K_t^{P_r}$ has two features: The Alexander grading of the knot Floer homology of $K_t^{P_r}$ is determined by the pattern P_r; The homology itself on the top grading is determined by the filtered chain homotopy type of $\widehat{CFK}(S^3, K)$ when $|t| >> 0$. As an important application, we calculate the Seifert genus of $K_t^{P_r}$ for all $t \in \mathbb{Z}$.

1 Introduction

P. Ozsváth and Z. Szabó [10] defined a homology theory to oriented closed 3-manifolds, known as the Heegaard Floer homology or Ozsváth-Szabó homology. Precisely, the associated chain complex to a 3-manifold M is denoted $\widehat{CF}(M)$, and its homology $\widehat{HF}(M)$ is proven to be a topological invariant. When considering a knot K in the 3-manifold M, P. Ozsváth and Z. Szabó [9], and J. Rasmussen [11] respectively noticed that K induces a filtration to the complex $\widehat{CF}(M)$, and they proved that the filtered chain homotopy type of the filtered chain complex is a knot invariant. When $M = S^3$, let $F(K, m) \subset \widehat{CF}(S^3)$ be the subcomplex of filtration m, $m \in \mathbb{Z}$. Then we have:

$$0 \subset \cdots \subset F(K, m) \subset F(K, m+1) \subset \cdots \subset \widehat{CF}(S^3).$$

The associated chain complex is $\widehat{CFK}(S^3, K, m) = F(K, m)/F(K, m-1)$ and its homology is denoted $\widehat{HFK}(S^3, K, m)$. The homological grading of the homology group is renamed Maslov grading, and the new grading induced from the filtration is called the Alexander grading. The group

$$\widehat{HFK}(S^3, K) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} \widehat{HFK}_j(S^3, K, i),$$

where i and j are Alexander grading and Malsov grading respectively, is called the knot Floer homology of K. The Ozsváth-Szabó τ invariant is defined as:

$$\tau(K) = \min\{m \in \mathbb{Z} | i_* : \widehat{HF}(F(K, m)) \longrightarrow \widehat{HF}(S^3) \text{ is non-trivial}\}.$$

Given a knot $K \subset S^3$ and a non-trivially properly embedded simple closed curve $P \subset \mathbf{T}$, where $\mathbf{T}$ is a solid torus, we let K_t^P denote the t-twisted satellite knot with companion K and pattern P. Let $\Delta_K(T)$ denote the symmetric Alexander-Conway polynomial of K. It is known (see [4]) that

$$\Delta_{K_t^P}(T) = \Delta_K(T^p) \cdot \Delta_{O_t^P}(T). \tag{1}$$

Here O denotes the unknot, and $p = [P] \in H_1(\mathbf{T}, \mathbb{Z})$. It is proved in [7] that the Euler characteristic of the group $\widehat{HFK}(S^3, K)$ coincides with $\Delta_K(T)$.

In this note, we study the knot Floer homology of (S^3, K_t^P) for some given patterns. Our one purpose is to see how the relation (1) is reflected on the level of knot Floer homology.

This subject has been studied by M. Hedden in two cases. The $(p, pn \pm 1)$ cabled knots were studied by M. Hedden in [2], where he showed that the Floer homology of the cabled knot

*Email: bao.y.aa@m.titech.ac.jp

depends only on the filtered chain homotopy type of $\widehat{CFK}(S^3, K)$ for $|n| >> 0$. In [3] M. Hedden completely calculated the knot Floer homology groups and Ozsváth-Szabó τ invariants for the Whitehead doubles. For other research related to this topic, please refer to [5] [1].

We first define the patterns to be used in our note. Let us consider the 2-bridge link $C(-2, -2, \cdots, -2)$ in Conway's normal form with n terms of -2, which will be refered as $C(n)$ for short. We embed $C(2r), r \geq 0$ nontrivially into the standard solid torus **T** as in Figure 1. These embeddings are chosen here to be the patterns, denoted P_r. When $r = 0$ for example, the pattern P_0 gives rise to the Whitehead doubles.

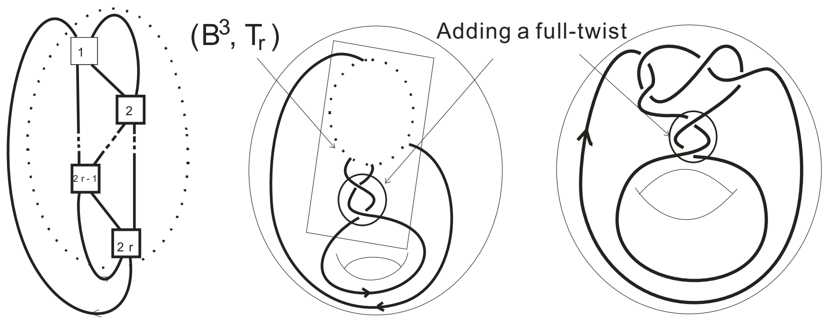


Figure 1: The left figure is the 2-bridge knot $C(2r)$ in Conway's normal form. Inside the block marked with an odd (even, resp.) number is a negative (positive, resp.) full-twist. The midde figure illustrates the way that we embed $C(2r)$ into the solid torus **T**. The right figure is an explicit example of the embedding when $r = 1$.

In this note, we extend M. Hedden's ideas in [3] to study the knot Floer homology of $K_t^{P_r}$. As a result, we get that the top Alexander grading of $\widehat{HFK}(S^3, K_t^{P_r})$ is $r+1$, which is fixed by the pattern P_r, and the group $\widehat{HFK}(S^3, K_t^{P_r}, r+1)$ for $|t| >> 0$ is determined by the filtered chain homotopy type of $\widehat{CFK}(S^3, K)$.

Theorem 1.1. *Let $K \subset S^3$ be a knot with Seifert genus $g(K) = g$. Then there exists an integer $T > 0$ so that for $t > T > 0$, we have*

$$\widehat{HFK}_*(S^3, K_t^{P_r}, r+1) \cong \mathbb{Z}_{(r+1)}^{t-2g-2} \bigoplus_{i=-g}^{g} \left[\widehat{HF}_{*-r-1}(F(K,i))\right]^2,$$

$$\widehat{HFK}_*(S^3, K_{-t}^{P_r}, r+1) \cong \mathrm{Tor} \bigoplus \mathbb{Z}_{(r+1)}^{2\tau(K)-2g-2} \bigoplus \mathbb{Z}_{(r)}^{2\tau(K)+t} \bigoplus_{i=-g}^{g} \left[\widehat{HF}_{*-r-1}(F(K,i))\right]^2,$$

where Tor *is empty or denotes some torsion part of the homology, and the subindices of $\mathbb{Z}$ are Maslov gradings.*

The convension here is that if any power of a summand in the right-hand of an equation is negative, we simply move the term to the left-hand of the equation and convert the power to its opposite value, just as we usually do for multiplication of numbers. Recall that the Seifert genus of a knot can be detected from its knot Floer homology (refer to [8]). Using Theorem 1.1, we can determine the Seifert genus of $K_t^{P_r}$ for any t as a corollary, the proof of which will be omitted in this note.

Corollary 1.2. *For any non-trivial knot $K \subset S^3$ and $t \in \mathbb{Z}$, the Seifert genus $g(K_t^{P_r})$ of the satellite knot $K_t^{P_r}$ is $r+1$.*

2 Compatible Heegaard diagrams for satellite knots

Definition 2.1. *A doubly-pointed Heegaard diagram* (*simply Heegaard diagram*) for a knot (M, K) is a collection of data $(\Sigma_g, \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_g\}, \beta = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g\}, z, w)$, which satisfies

1. Σ_g is an oriented surface of genus g, called the Heegaard surface, and it splits M into two handlebodies U_1 and U_2.

2. α and β are two collections of pairwise disjoint, linearly independent essential curves in Σ_g such that attaching 2-handles along α and β curves respectively specifies the handlebody U_1 and U_2 respectively.

3. There exist two arcs a and b in Σ_g with common endpoints z and w such that $a \cap \alpha = \emptyset$ and $b \cap \beta = \emptyset$. The knot K is isotopic to the union $a \cup b$ after pushing the arcs a and b properly into the handlebodies U_1 and U_2 respectively.

We first construct a Heegaard diagram for (S^3, P_r) (see Figure 2). When $r = 0$, i.e. the case of Whitehead doubles, the construction is shown in [3]. In general, let p_r/q_r denote the absolute value of the slope of the rational tangle, (B^3, T_r), inside the rectangle in the middle figure of Figure 1. Namely $p_r/q_r = [2, 2, \cdots, 2]$, the continued fraction of $2r + 1$ numbers of 2. As a trivial 2-string tangle in a 3-ball, there always exists an embedded disk in the 3-ball to separate the two strings of the tangle T_r. The rational number p_r/q_r, the slope of the tangle, gives rise a way to find a splitting disk, but we will not describe it here. Let $\beta_r \subset \partial B^3$ be the boundary of the splitting disk. Let $\{A, B\}$ and $\{C, D\}$ denote the sets of endpoints of the two strings respectively in T_r (see Figure 2).

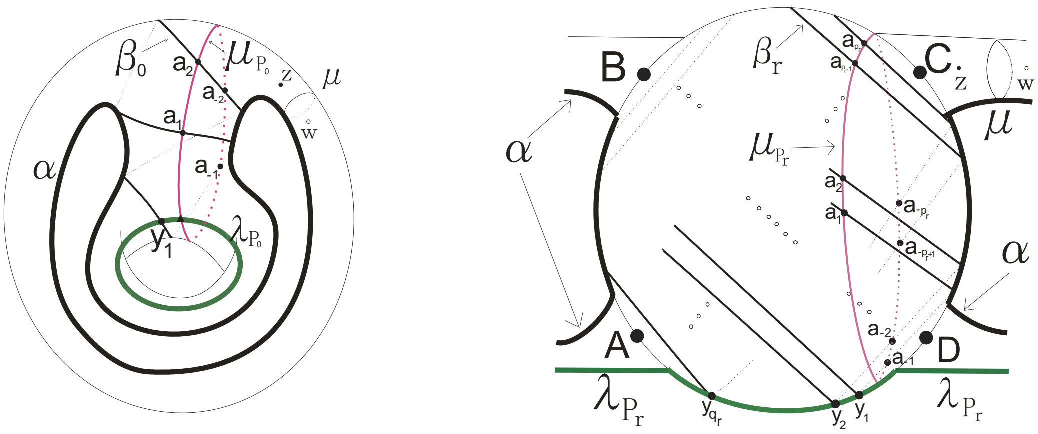


Figure 2: The right figure illustrates the Heegaard diagrams $HD(S^3, P_r)$ and $HD(S^1 \times S^2, P_r)$. The left figure is the case when $r = 1$.

We attach two one-handles to B^3 along the feet A, D and B, C respectively. The resulting manifold is a genus two handlebody, and its boundary is denoted Σ_2. We claim that a Heegaard diagram for (S^3, P_r) is

$$HD(S^3, P_r) = (\Sigma_2, \{\alpha, \lambda_{P_r}\}, \{\beta_r, \mu\}, z, w),$$

where the curves μ, α and λ_{P_r} are shown in Figure 2. Here μ is a meridian of P_r. Attaching a 2-handle along the curve α leaves us a solid torus, which is $\mathbf{T}$. Suppose the pair $(\mu_{P_r}, \lambda_{P_r})$ is the meridion-longitude system of $\mathbf{T}$, and $\lambda_{P_r} \cap \mu_{P_r} = \{\theta'\}$, we can get a Heegaard diagram for $(S^1 \times S^2, P_r)$ by replacing the curve λ_{P_r} with the curve μ_{P_r} in the Heegaard diagram $HD(S^3, P_r)$. Precisely, it is

$$HD(S^1 \times S^2, P_r) = (\Sigma_2, \{\alpha, \mu_{P_r}\}, \{\beta_r, \mu\}, z, w).$$

We observe that the intersection $\beta_r \cap \lambda_{P_r}$ contains q_r points, labelled $y_1, \cdots, y_{q_r}$ from right to left. The intersection of $\beta_r \cap \mu_{P_r}$ contains $2p_r$ points, labelled $a_1, a_{-1}, \cdots, a_{p_r}, a_{-p_r}$ from bottom to top. See Figure 2.

Then we consider a Heegaard diagram for the companion knot K:

$$HD(S^3, K) = (\Sigma_g, \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{g-1}, \mu_K\}, \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g\}, z', w'),$$

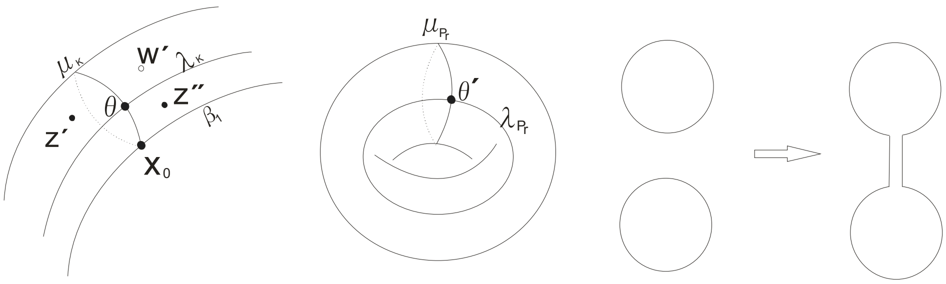


Figure 3: The left figure is the local picture of both $HD(S^3, K)$ and $HD(S^3_t(K), \mu_K)$. The middle one highlights the meridian μ_{P_r} and the longitude λ_{P_r}, of the solid torus **T**. The right figure illustrates the boundary sum of two closed curves along the tube.

where μ_K is a meridian of K, and the positions of points z' and w' are shown in the left figure of Figure 3. We require that $\mu_K \cap \cup_{i=1}^{g} \beta_i = \mu_K \cap \beta_1 = \{x_0\}$. Such kinds of Heegaard diagrams exist for any knot in S^3 (see [7] for more details). In addition, one can draw a framed longitude λ_K of K with framing t in the Heegaard surface Σ_g such that $\lambda_K \cap \cup_{i=1}^{g-1} \alpha_i = \emptyset$. The longitude λ_K can be arranged to have one intersection point with μ_K, and we denote $\lambda_K \cap \mu_K = \{\theta\}$.

Let $S^3_t(K)$ be the 3-manifold obtained by t-surgery of S^3 along K. Notice that $S^3_t(K)$ is a rational homology sphere when $t \neq 0$. We may assume that $t \neq 0$ except in Corollary 1.2. If we regard μ_K as a rationally null-homologous simple closed curve in $S^3_t(K)$, a compatible Heegaard diagram for $(S^3_t(K), \mu_K)$ is obtained by replacing μ_K with λ_K in $HD(S^3, K)$:

$$HD(S^3_t(K), \mu_K) = (\Sigma_g, \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{g-1}, \lambda_K\}, \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g\}, z'', w').$$

Here the placement of the point z'' is shown in Figure 3.

As a result, a Heegaard diagram for $(S^3, K_t^{P_r})$ is given by

$$HD(S^3, K_t^{P_r}) = (\Sigma_{g+2}, \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{g-1}, \lambda_{P_r} \sharp \lambda_K, \mu_{P_r} \sharp \mu_K\}, \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g, \beta_r, \mu\}, z, w),$$

where Σ_{g+2} is the connected sum of Σ_g and Σ_2 by attaching a tube from the point θ to the point θ', and $\lambda_{P_r} \sharp \lambda_K$ ($\mu_{P_r} \sharp \mu_K$, respectively) is the boundary sum of λ_{P_r} and λ_K (μ_{P_r} and μ_K, respectively) along the tube described above.

3 Relation between $\widehat{HFK}(S^3, K_t^{P_r}, r+1)$ and $\widehat{HFK}(S^3_t(K), \mu_K)$

In this section we study the knot Floer homology chain complex $(\widehat{CFK}(S^3, K_t^{P_r}), \widehat{\partial})$ associated to $HD(S^3, K_t^{P_r})$. First of all, we show that the generators are assorted into two classes. In order to get more accurate classification, the Alexander grading differences between certain pairs of generators are studied. As a result, we obtain a parallel result to that of Section 3 in [3], which is, staying in the top Alexander grading, there is a natural identification of the chain complexes

$$\widehat{CFK}(S^3, K_t^{P_r}, r+1) = \bigoplus_{\{s_i \in \mathrm{Affine}(H_1(S^3_t(K)))\}} \widehat{CFK}(S^3_t(K), \mu_K, s_i),$$

where $\mathrm{Affine}(H_1(S^3_t(K)))$ is an affine space of $H_1(S^3_t(K))$. The curve μ_K here is a rationally null-homologous curve in $S^3_t(K)$, and the corresponding knot Floer homology is introduced in [6]. The chain complex is denoted $\widehat{CFK}(S^3_t(K), \mu_K)$.

First of all, we claim that the generators of the chain complex $\widehat{CFK}(S^3, K_t^{P_r})$ are splitted into two classes of the forms

1. $\{x, y_i\} \times \mathbf{p} \in \widehat{CFK}(S^3, P_r) \times \widehat{CFK}(S^3, K), i = 1, 2, \cdots, q_r.$

2. $\{x, a_j\} \times \mathbf{q} \in \widehat{CFK}(S^1 \times S^2, P_r) \times \widehat{CFK}(S^3_t(K), \mu_K), j = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm p_r$

The claim above is based on the following arguement. Recall that the generators correspond to $(g+2)$-tuple of intersection points between α curves and β curves of the Heegaard diagram $HD(S^3, K_t^{P_r})$. In this Heegaard diagram, we first choose the intersection point for the curve μ and β_r, which are two β-curves of $HD(S^3, K_t^{P_r})$. Notice that the intersection point $x \in \mu \cap \alpha$ has to be chosen since it is the unique choice for μ. For the curve β_r, we can either choose an intersection point in $\{y_i\}_{i=1}^{q_r} = \beta_r \cap \lambda_{P_r} \sharp \lambda_K$, which constitute the first class, or an intersetion point in $\{a_j\}_{j=1}^{\pm p_r} = \beta_r \cap \mu_{P_r} \sharp \mu_K$, which make up the second class (See Figure 2 for illustration). The intersection points of the other α curves and β curves can be naturally collected to form generators of $\widehat{CFK}(S^3, K)$ and $\widehat{CFK}(S_t^3(K), \mu_K)$ respectively.

Then we calculate the Alexander grading differences between pairs of generators. The proofs of Equations (2) and (3) are similar to that of Lemmas 3.2, 3.3 in [3].

Lemma 3.1. *1. Suppose $\{x, y_i\} \times \boldsymbol{p}_k, \{x, y_i\} \times \boldsymbol{p}_l \in \widehat{CFK}(S^3, P_r) \times \widehat{CFK}(S^3, K)$ are two generators of the first class, then*

$$A(\{x, y_i\} \times \boldsymbol{p}_k) = A(\{x, y_i\} \times \boldsymbol{p}_l). \tag{2}$$

2. *Suppose $\{x, a_j\} \times \boldsymbol{q}_k, \{x, a_j\} \times \boldsymbol{q}_l \in \widehat{CFK}(S^1 \times S^2, P_r) \times \widehat{CFK}(S_t^3(K), \mu_K)$ are two generators of the second class, then*

$$A(\{x, a_j\} \times \boldsymbol{q}_k) = A(\{x, a_j\} \times \boldsymbol{q}_l). \tag{3}$$

3. *For each generator $\boldsymbol{q} \in \widehat{CFK}(S_t^3(K), \mu_K)$ we have*

$$A(\{x, a_j\} \times \boldsymbol{q}) - A(\{x, a_{-j}\} \times \boldsymbol{q}) = 1, \tag{4}$$

$$A(\{x, a_j\} \times \boldsymbol{q}) - A(\{x, a_k\} \times \boldsymbol{q}) = A(\{x, a_j\}) - A(\{x, a_k\}), \tag{5}$$

for $1 \le j, k \le p_r$. The Alexander grading in the right hand of (5) is the grading in the complex $\widehat{CFK}(S^1 \times S^2, P_r)$.

4. *There exists a generator $\boldsymbol{p} \in \widehat{CFK}(S^3, K)$ and a generator $\boldsymbol{q} \in \widehat{CFK}(S_t^3(K), \mu_K)$ such that*

$$A(\{x, y_j\} \times \boldsymbol{p}) - A(\{x, a_{-j}\} \times \boldsymbol{q}) = 0, \tag{6}$$

for $1 \le j \le q_r$.

Before going further, we state some observations to the Alexander-Conway polynomial $\Delta_{C(2r+1)}(T)$ of $C(2r+1)$, and to the complex $\widehat{CFK}(S^1 \times S^2, P_r)$, whose homology is defined to be the link Floer homology of $C(2r+1)$ in S^3. Let $\det(L) := 2^{l-1}|\Delta_L(-1)|$ denote the determinant of an l-component link $L \subset S^3$. We state the following lemma.

Lemma 3.2. *1. $\det(C(2r+1)) = 2p_r$.*

2. *The differential of the complex $\widehat{CFK}(S^1 \times S^2, P_r)$ is trivial.*

On the other hand, since the link $C(2r+1)$ is a fibered alternating link, the highest degree of the polynomial $(t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{C(2r+1)}(T)$, which corresponds to the top Alexander grading of $\widehat{HFK}(S^3, C(2r+1))$, is $r+1$, and the coefficient of the corresponding term is ± 1. Therefore $\mathrm{rank}(\widehat{HFK}(S^3, C(2r+1), r+1)) = 1$. That is to say, in the Heegaard diagram $HD(S^1 \times S^2, P_r)$, there is one any only one intersection point, denoted $a_{f(r)}$, in $\mu_{P_r} \cap \beta_r$ corresponding to the top Alexander grading $r+1$. Therefore this gives rise to a map

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ r &\longmapsto f(r). \end{aligned}$$

From Equations (2) to (6) and the discussion above, we conclude that there are at most $2r+3$ Alexander gradings on which the chain complex $\widehat{CFK}(S^3, K_t^{P_r})$ is non-trivial. The chain complex on the top Alexander grading, the grading $r+1$, is generated by $\{x, a_{f(r)}\} \times \widehat{CFK}(S^3_t(K), \mu_K)$. Therefore, the following identification exsits as groups:

$$\widehat{CFK}(K_t^{P_r}, r+1) \cong \widehat{CFK}(S^3_t(K), \mu_K).$$

Moreover, as stated in [3], the above identification can be extended to the level of complex as follows.

Proposition 3.3. *Let K be a knot in S^3. Then*

$$\widehat{HFK}(S^3, K_t^{P_r}, r+1) \cong \bigoplus_{\{s_i \in \text{Affine}(H_1(S^3_t(K)))\}} \widehat{HFK}(S^3_t(K), \mu_K, s_i). \tag{7}$$

Proof. The proof is the same as that of Theorem 3.5 in [3]. □

4 Studying $\widehat{HFK}(S^3, K_t^{P_r}, r+1)$ when $|t| >> 0$

In this section, we will mimic the proofs in Section 4 of [3] to calculate $\widehat{HFK}(S^3, K_t^{P_r}, r+1)$ when t is sufficiently large. First of all, we recall a theorem from M. Hedden [3].

Theorem 4.1 ([3])**.** *Let $K \subset S^3$ be a knot. There exists an integer $T > 0$ such that for $t > T$ the following holds for all m.*

$$\widehat{HFK}_*(S^3_t(K), \mu_K, s_m) \cong \widehat{HF}_{*+d_-(m)}(F(K,m)) \oplus \widehat{HF}_{*-2m+d_-(m)}(F(K,-m-1)),$$

$$\widehat{HFK}_*(S^3_{-t}(K), \mu_K, s_m) \cong \widehat{HF}_{*-d_+(m)}\left(\frac{\widehat{CF}(S^3)}{F(K,m)}\right) \oplus \widehat{HF}_{*-2m-d_+(m)}\left(\frac{\widehat{CF}(S^3)}{F(K,-m-1)}\right),$$

where $d_\pm(m) = (t - (2m \pm t)^2)/4t$.

Proposition 3.4 and Theorem 4.1 imply a relation between $\widehat{HFK}(S^3, K_t^{P_r}, r+1)$ and the filtered chain homology groups of $\widehat{CFK}(S^3, K)$, but no relation about Maslov grading is mentioned. In order to solve the problem, we first restate a lemma in [3], which studies the Maslov gradings of some generators.

Each generator in $\{x, y_1\} \times \widehat{CFK}(S^3, K)$ is of the form $\{x, y_1\} \times \{x_0, \mathbf{z}\}$ for some $(g-1)$-tuple $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_{g-1})$ where $z_i \in \alpha_i \cap \beta_{\sigma(i)+1}$ for $1 \le i \le g-1$, for some $\sigma \in S_{g-1}$, while each generator in $\{x, a_j\} \times \widehat{CFK}(S^3_t(K), \mu_K)$ is of the form $\{x, a_j\} \times \{x_{\lambda_K}, \mathbf{z}\}$ for some point $x_{\lambda_K} \in \beta_1 \cap \lambda_K \sharp \lambda_{P_r}$. We call the regular neighborhood $\mu_K \times I \subset \Sigma_g$ of μ_K the winding region of the Heegaard diagram $HD(S^3_t(K), \mu_K)$. We can assume that for the longitude curve λ_K of framing t, there are t intersection points in $\beta_1 \cap \lambda_K \sharp \lambda_{P_r}$ supported in the winding region $\mu_K \times I$. For convenince, let $\{x_k | \lfloor -t/2 \rfloor \le k \le \lfloor t/2 \rfloor, k \ne 0\}$ denote the set of these intersection points, where $\lfloor * \rfloor$ is the integer such that $0 \le * - \lfloor * \rfloor < 1$. We arrange that the point x_k with $k > 0$ ($k < 0$) stays in the right (left) of the point x_0.

Now we recall Lemmas 4.5, 4.6 in [3]. We modify them to our context as follows.

Lemma 4.2. *Let $k > 0$. For $t >> 0$ we have*

$$gr(\{x, a_{f(0)}\} \times \{x_k, \mathbf{z}\}) = gr(\{x, y_1\} \times \{x_0, \mathbf{z}\}) + 1,$$

$$gr(\{x, a_{f(0)}\} \times \{x_{-k}, \mathbf{z}\}) = gr(\{x, y_1\} \times \{x_0, \mathbf{z}\}) + 2A(\mathbf{z}) + 1,$$

while for $t << 0$,

$$gr(\{x, a_{f(0)}\} \times \{x_k, \mathbf{z}\}) = gr(\{x, y_1\} \times \{x_0, \mathbf{z}\}),$$

$$gr(\{x, a_{f(0)}\} \times \{x_{-k}, \mathbf{z}\}) = gr(\{x, y_1\} \times \{x_0, \mathbf{z}\}) + 2A(\mathbf{z}).$$

Here $A(\mathbf{z})$ denotes the Alexander grading of $\{x_0, \mathbf{z}\}$ in the complex $\widehat{CFK}(S^3, K)$.

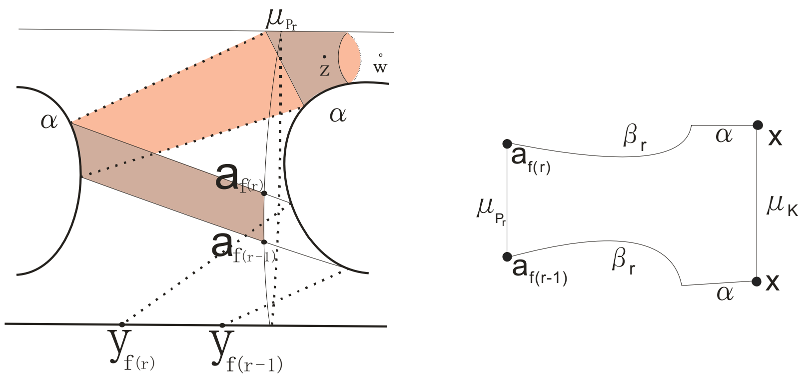


Figure 4: The left figure illustrates the domain $\phi_{f(r)}$ from $a_{f(r)}$ to $a_{f(r-1)}$. The right figure is a petagon obtained by cutting $\phi_{f(r)}$ along the curve α.

On the other hand, there is a Whitney disk $\phi_{f(r)}$ connecting $\{x, a_{f(r-1)}\} \times \mathbf{p}$ to some generator $\{x, a_*\} \times \mathbf{p}$ for any $\mathbf{p} \in \widehat{CFK}(S^3_t(K), \mu_K)$. See the shadowed domain in Figure 4. We assert that $a_* = a_{f(r)}$ without proof. We can calculate to get that

$$gr(\{x, a_{f(r)}\} \times \mathbf{p}) - gr(\{x, a_{f(r-1)}\} \times \mathbf{p}) = 1.$$

Combining this together with Lemma 4.2, we get the follows relations by the additivity of Maslov grading [10]. For $t >> 0$ and $k > 0$ we have

$$\begin{aligned} gr(\{x, a_{f(r)}\} \times \{x_k, \mathbf{z}\}) &= gr(\{x, y_1\} \times \{x_0, \mathbf{z}\}) + r + 1, \\ gr(\{x, a_{f(r)}\} \times \{x_{-k}, \mathbf{z}\}) &= gr(\{x, y_1\} \times \{x_0, \mathbf{z}\}) + 2A(\mathbf{z}) + r + 1, \end{aligned} \tag{8}$$

while for $t << 0$, we have

$$\begin{aligned} gr(\{x, a_{f(r)}\} \times \{x_k, \mathbf{z}\}) &= gr(\{x, y_1\} \times \{x_0, \mathbf{z}\}) + r, \\ gr(\{x, a_{f(r)}\} \times \{x_{-k}, \mathbf{z}\}) &= gr(\{x, y_1\} \times \{x_0, \mathbf{z}\}) + 2A(\mathbf{z}) + r. \end{aligned} \tag{9}$$

Equations (8) and (9) allow us to apply the proof of Theorem 4.2 in [3] to our cases. We can fix the grading difference, and get the following lemma.

Lemma 4.3. *For all $t > T > 0$, there are isomorphisms of absolutely $\mathbb{Z}$-graded abelian groups:*

$$\widehat{HFK}_*(S^3, K_t^{P_r}, r+1) \cong \bigoplus_{m=\lfloor -t/2+1 \rfloor}^{m=\lfloor t/2 \rfloor} \left[\widehat{HF}_{*-r-1}(F(K,m)) \oplus \widehat{HF}_{*-r-1}(F(K,-m-1)) \right],$$

$$\widehat{HFK}_*(S^3, K_{-t}^{P_r}, r+1) \cong \bigoplus_{m=\lfloor -t/2+1 \rfloor}^{m=\lfloor t/2 \rfloor} \left[\widehat{HF}_{*-r}\left(\frac{\widehat{CF}(S^3)}{F(K,m)}\right) \oplus \widehat{HF}_{*-r}\left(\frac{\widehat{CF}(S^3)}{F(K,-m-1)}\right) \right].$$

Proof. The idea of the proof is the same as that of Theorem 4.2 in [3]. □

Since $|t|$ is sufficiently large, so we assume that $|t| > g$ and apply the adjunction inequality [9] to Lemma 4.3, which becomes equivalent to the following lemma.

Lemma 4.4. *Let $K \subset S^3$ be a knot with Seifert genus $g(K) = g$. Then for all $t > T > 0$ there are isomorphisms of absolutely $\mathbb{Z}$-graded abelian groups:*

$$\widehat{HFK}_*(S^3, K_t^{P_r}, r+1) \cong \mathbb{Z}_{(r+1)}^{t-2g-2} \bigoplus_{m=-g}^{g} \left[\widehat{HF}_{*-r-1}(F(K,m)) \right]^2,$$

$$\widehat{HFK}_*(S^3, K_{-t}^{P_r}, r+1) \cong \mathbb{Z}_{(r)}^{t-2g} \bigoplus_{m=-g}^{g} \left[\widehat{HF}_{*-r}(\widehat{CF}(S^3)/F(K,m)) \right]^2.$$

Here we state a lemma, which is similar to Lemma 5.3 from M. Hedden in [3].

Lemma 4.5. *Let $K \subset S^3$ be a knot with Seifert genus $g(K) = g$, and $t > T > 0$ as above. Then*

$$\widehat{HFK}_*(S^3, K_t^{P_r}, r+1) = \widehat{HFK}_*(S^3, K_{-t}^{P_r}, r+1) \quad if* \neq r, r+1,$$

$$rk(\widehat{HFK}_r(S^3, K_t^{P_r}, r+1)) = rk(\widehat{HFK}_r(S^3, K_{-t}^{P_r}, r+1)) - t - 2\tau(K),$$

$$rk(\widehat{HFK}_{r+1}(S^3, K_t^{P_r}, r+1)) = rk(\widehat{HFK}_{r+1}(S^3, K_{-t}^{P_r}, r+1)) + t - 2\tau(K).$$

Proof of Theorem 1.1. Applying Lemma 4.5 to replace $\widehat{HF}(\widehat{CF}(S^3)/F(K,m))$ with $\widehat{HF}(F(K,m))$ in Lemma 4.4 completes the proof.

References

[1] E. EFTEKHARY, *Longitude Floer homology and the Whitehead double*, Algebr. Geom. Topol., 5 (2005), pp. 1389–1418 (electronic).

[2] M. HEDDEN, *On knot Floer homology and cabling*, Ph.D.thesis, Columbia University, (2005).

[3] ——, *Knot Floer homology of Whitehead doubles*, Geom. Topol., 11 (2007), pp. 2277–2338.

[4] W. B. R. LICKORISH, *An introduction to knot theory*, vol. 175 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] P. ORDING, *The knot Floer homology of satellite (1,1)-knots*, Ph.D.thesis, Columbia University, (2006).

[6] P. OZSVÁTH AND Z. SZABÓ, *Knot Floer homology and rational surgeries*, arXiv: math. GT/0504404.

[7] ——, *Heegaard Floer homology and alternating knots*, Geom. Topol., 7 (2003), pp. 225–254 (electronic).

[8] ——, *Holomorphic disks and genus bounds*, Geom. Topol., 8 (2004), pp. 311–334 (electronic).

[9] ——, *Holomorphic disks and knot invariants*, Adv. Math., 186 (2004), pp. 58–116.

[10] ——, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2), 159 (2004), pp. 1027–1158.

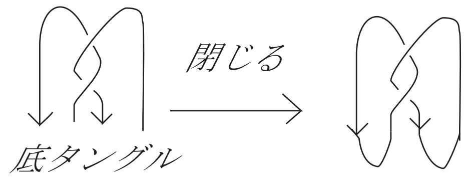
[11] J. RASMUSSEN, *Floer homology and knot complements*, Ph.D.thesis, Harvard University, (2003).

境界底タングルの普遍 sl_2 不変量について

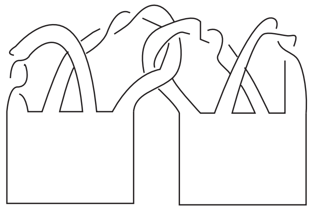
鈴木　咲衣
京都大学数理解析研究所

1　概要

底タングルとは立方体 $[0,1]^3$ の中の向きとフレーミング付きのタングルで，境界が底に一列に並び，一つの紐の２つの境界が隣り合っているようなもののことをいう．ただし，閉じた成分は含まない．任意の絡み目のイソトピー類は底タングルの境界を閉じることにより得られる．



$\mathbb{R}^3$ 内の任意の結び目 K は，$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれたコンパクトで向き付けられた曲面の境界となる．そのような曲面を K の Seifert 曲面と呼ぶ．絡み目 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ は，各成分 L_i が互いに交わりを持たない Seifert 曲面を張るときに境界絡み目と呼ばれる．



１成分底タングル T を $[0,1]^3$ の底の直線で閉じた結び目 K を考える．K は $[0,1]^3$ に埋め込まれたコンパクトで向き付けられた曲面を張る．そのような曲面を底タングル T の Seifert 曲面と呼ぶ．底タングル $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ は，各成分 T_i が互いに交わりを持たない Seifert 曲面を張るときに境界絡み目と呼ばれる．

任意のリボン Hopf 代数 U とその有限次元表現を与えるごとに，絡み目の不変量を構成することが出来る [5]．普遍不変量とは，リボン Hopf 代数 U から定義され，上記の不変量に対して普遍性を持つような，タングルと絡み目の不変量である [3, 4]．リー環 sl_2 の量子展開環 $U_h(sl_2)$ は完備化されたリボン $\mathbb{Q}[[h]]$-Hopf 代数である．リボン Hopf 代数 $U_h(sl_2)$ から得られる普遍不変量を普遍 sl_2 不変量と呼ぶ．この講演では，境界底タングルの普遍 sl_2 不変量の代数的性質を紹介する．

2 量子展開環 $U_h(sl_2)$ のリボンホップ代数構造

この節では，量子展開環 $U_h(sl_2)$ のリボンホップ代数構造を紹介する．ここからは次の q-整数を用いる．

$$\{i\}_q = q^i - 1, \quad \{i\}_{q,n} = \{i\}_q\{i-1\}_q \cdots \{i-n+1\}_q, \quad \{n\}_q! = \{n\}_{q,n},$$
$$[i]_q = \{i\}_q/\{1\}_q, \quad [n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q, \quad \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}_q = \{i\}_{q,n}/\{n\}_q!,$$

$i \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. 不定元 h に関する形式的冪級数環を $\mathbb{Q}[[h]]$ と表す．量子展開環 $U_h(sl_2)$ とは，トポロジカルに H, E, F で生成され，関係式

$$HE - EH = 2E, \quad HF - FH = -2F, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}},$$

で定義される h 進完備 $\mathbb{Q}[[h]]$-代数である．ただし，

$$q = \exp h, \quad K = q^{H/2} = \exp \frac{hH}{2}$$

とおいた．

次に，$U_h(sl_2)$ に入る (完備化された) リボンホップ代数構造について説明する．$U_h(sl_2)$ の完備化された n 重テンソル積を $U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ と書く．余積 Δ: $U_h(sl_2) \to U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2}$，余単位射 ε: $U_h(sl_2) \to \mathbb{Q}[[h]]$，対合射 S: $U_h(sl_2) \to U_h(sl_2)$ は次で定義される．

$$\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad \varepsilon(H) = 0, \quad S(H) = -H,$$
$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E, \quad \varepsilon(E) = 0, \quad S(E) = -K^{-1}E,$$
$$\Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \quad \varepsilon(F) = 0, \quad S(F) = -FK.$$

普遍 R-行列とその逆元は次で与えられる．

$$R = D\big(\sum_{i \geq 0} q^{\frac{1}{2}i(i-1)} \tilde{F}^{(i)} K^{-i} \otimes e^i\big), \quad R^{-1} = D^{-1}\big(\sum_{i \geq 0} (-1)^i \tilde{F}^{(i)} \otimes K^{-i} e^i\big),$$

ただし

$$e = q^{-1/2}(q-1)E, \quad \tilde{F}^{(i)} = \frac{F^i K^i}{[i]_q!}, \quad D = q^{\frac{1}{4} H \otimes H} = \exp\big(\frac{h}{4} H \otimes H\big),$$

$i \geq 1$. 以下 $R = \sum_k \alpha_k \otimes \beta_k$, $R^{-1} = \sum_k \bar{\alpha}_k \otimes \bar{\beta}_k$ とおく．リボン元とその逆元は次で与えられる．

$$r = \sum_k \bar{\alpha}_k K^{-1} \bar{\beta}_k = \sum_k \bar{\beta}_k K \bar{\alpha} k, \quad r^{-1} = \sum_k \alpha_k K \beta_k = \sum_k \beta_k K^{-1} \alpha_k.$$

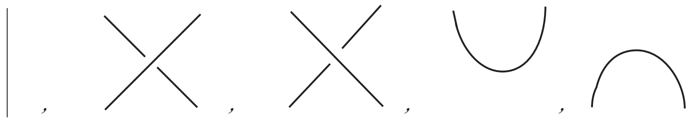


図 1: 基本図．向きは任意．

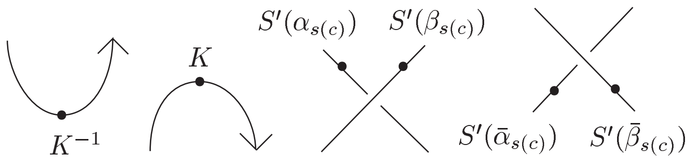


図 2: 基本図へのラベルの置き方．

3　底タングルの普遍 sl_2 不変量と色つき Jones 多項式

この節では，底タングルの普遍 sl_2 不変量の定義をする．後に普遍 sl_2 不変量と色つき Jones 多項式の関係を紹介する．n 成分底タングル $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ に対して，T の普遍 sl_2 不変量 $J_T \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ を以下で定める．まず T の図式 P を一つ選び，その交点の集合を $C(P)$ とおく．ただし P は基本図（図 1 参照）を縦と横につなげて得られる絡み目図式とする．射

$$s\colon\ C(P) \ \ \to \ \ \{0, 1, 2, \ldots\}$$

を図式 P のステイトと呼ぶ．図式 P のステイトの集合を $S(P)$ と書く．各ステイト $s \in S(P)$ に対して，$U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ の元 $J(P, s)$ を以下で定める．まず図式 P の各基本図 に対して，図 2 のようにラベルを貼る．(図 2 にない基本図にはラベルを貼らない.）ここで “S'” は，紐の向きが下向きのとき id に，上向きのとき S に置き換える．$J(P, s) \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ のテンソル積の i 成分を，T_i 成分に置かれたラベルの積で定義する．ここで，ラベルは紐を逆向きにたどりながら読み，読んだ順に左から右へ書く，という方法で積をとる． 例えば，

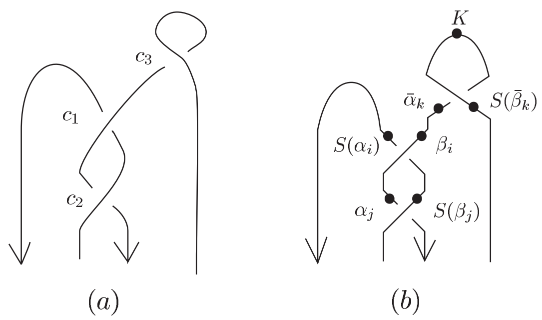


図 3: (a) 底タングル C. (b) 底タングル C の図式 P とラベル．

図 3 の底タングル C の図式 P については

$$J(P,s) = S(\alpha_i)S(\beta_j) \otimes \alpha_j\beta_i\bar{\alpha}_k K S(\bar{\beta}_k).$$

ただし $s(c_1)=i, s(c_2)=j, s(c_3)=k$ とおいた．すると，$J(P,s)$ のステイト和

$$J_T = \sum_{s\in S(P)} J(P,s)$$

は T の図式の取り方によらない値となり，底タングルの不変量を定める (cf. [4])．先ほどの例では

$$\begin{aligned} J_C &= \sum_{i,j,k} S(\alpha_i)S(\beta_j) \otimes \alpha_j\beta_i\bar{\alpha}_k K S(\bar{\beta}_k) \\ &= \sum_{i,j,k} (-1)^{i+j} q^{-\frac{1}{2}k(k-1)-j^2+2ij-3jk+2ki} \begin{bmatrix} j+k \\ j \end{bmatrix}_q \\ &\qquad \times D^{-2}(1\otimes q^{\frac{1}{4}H(H+2)})(\tilde{F}^{(i)}K^{-2j}e^j \otimes \tilde{F}^{(j+k)}K^{2(j-i)}e^{k+i}). \end{aligned}$$

次に普遍 sl_2 不変量と色つき Jones 多項式の関係を述べる．

$$\rho_i \colon U_h(sl_2) \to \mathrm{End}(W_i), \quad i=1,\ldots,n$$

を $U_h(sl_2)$ の有限次元表現とする．W_i に付随する射 $\mathrm{tr}_q^{W_i} \colon U_h(sl_2) \to \mathbb{Q}[[h]]$,

$$\mathrm{tr}_q^{W_i}(x) = \mathrm{tr}(\rho_i(K^{-1}x)), \quad x \in U_h(sl_2)$$

を量子トレースと呼ぶ．絡み目 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ に対して，各 L_i に W_i を対応させて得られる色つき Jones 多項式 $J_{L;W_1,\ldots,W_n}$ は $\mathbb{Z}[q^{1/4},q^{-1/4}]$ に値をもつ．絡み目 L が底タングル T を閉じて得られるとすると，

$$J_{L;W_1,\ldots,W_n} = (\mathrm{tr}_q^{W_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{tr}_q^{W_n})(J_T)$$

が成り立つ．

4 主定理とその応用

この節では主定理（定理 1）と応用（定理 2）を紹介する．定理 1,2 は葉廣 [2] による予想の解決である．

$K^{\pm 2}, e, \tilde{F}^{(i)}, i \geq 1$ で生成される $U_h(sl_2)$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-部分代数を $\mathcal{U}_q^{ev}$ とする．$\mathcal{U}_q^{ev}$ の，フィルトレーション $\mathcal{F}_k(\mathcal{U}_q^{ev}) = \mathcal{U}_q^{ev} e^k \mathcal{U}_q^{ev}, k \geq 0$ を用いた完備化を $\tilde{\mathcal{U}}_q^{ev}$ とする．すなわち

$$\tilde{\mathcal{U}}_q^{ev} = \mathrm{Image}\left(\varprojlim_k \mathcal{U}_q^{ev}/\mathcal{F}_k(\mathcal{U}_q^{ev}) \to U_h(sl_2)\right).$$

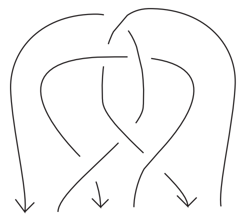


図 4: 閉じると Borromean 絡み目になる底タングル B.

同様に，$(\mathcal{U}_q^{ev})^{\otimes n}$ のフィルトレーション

$$\mathcal{F}_k((\mathcal{U}_q^{ev})^{\otimes n}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{U}_q^{ev})^{\otimes i-1} \otimes \mathcal{F}_k(\mathcal{U}_q^{ev}) \otimes (\mathcal{U}_q^{ev})^{\otimes n-i}, \quad k \geq 0$$

を用いた完備化を $(\tilde{\mathcal{U}}_q^{ev})^{\tilde{\otimes} n}$ とする．閉じると algebraically split (すべてのフレーミングとすべての絡み数が 0) になる n 成分底タングルの普遍 sl_2 不変量は $(\tilde{\mathcal{U}}_q^{ev})^{\tilde{\otimes} n}$ に含まれることが知られている (葉廣 [2]). 例えば Borromean 絡み目は algebraically split な絡み目の例である．閉じると Borromean 絡み目になる底タングル B(図 4) の普遍 sl_2 不変量は次で与えられる.

$$J_B = \sum_{m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3 \geq 0} (-1)^{n_1+n_2+n_3} q^{m_3+n_3} q^{\sum_{i=1}^{3} \left(-\frac{1}{2}m_i(m_i+1)-n_i+m_i m_{i+1}-2m_i n_{i-1}\right)}$$
$$\tilde{F}^{(n_3)} e^{m_1} \tilde{F}^{(m_3)} e^{n_1} K^{-2m_2} \otimes \tilde{F}^{(n_1)} e^{m_2} \tilde{F}^{(m_1)} e^{n_2} K^{-2m_3} \otimes \tilde{F}^{(n_2)} e^{m_3} \tilde{F}^{(m_2)} e^{n_3} K^{-2m_1},$$

ただし添え字 i は 3 を法として考える.

次に $K^{\pm 2}, e, f := (q-1)FK$ で生成される $\mathcal{U}_q^{ev}$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-部分代数を $\bar{U}_q^{ev}$ とする．$(\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}$ の，フィルトレーション $\mathcal{F}_k((\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}) = \mathcal{F}_k((\mathcal{U}_q^{ev})^{\otimes n}) \cap (\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}, k \geq 0$ を用いた完備化を $(\bar{U}_q^{ev})^{\tilde{}\,\tilde{\otimes} n}$ とする.

定理 1. T をフレーミング 0 の n 成分境界底タングルとする．このとき $J_T \in (\bar{U}_q^{ev})^{\tilde{}\,\tilde{\otimes} n}$ が成り立つ.

補足 1. フレーミング 0 の n 成分境界絡み目は *algebraically split* である．f^i と $\tilde{F}^{(i)}$ の間の関係式

$$f^i = q^{-\frac{1}{2}i(i-1)} \{i\}_q! \tilde{F}^{(i)}$$

に注意.

補足 2. 葉廣 *[2]* により 1 成分底タングルに対しての定理 *1* の主張はすでに示されている *(*1 成分底タングルは境界底タングルである*)*．また，筆者は定理 *1* の境界底タングルをリボン底タングルに置き換えた主張を示した *[6]*.

次に主定理の応用を紹介する．$\mathbb{Q}(q^{1/2})$-加群

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}(q^{1/2})}\{V_l \mid l \geq 1\}, \quad V_l : l \text{ 次元既約表現}$$

にテンソル積で積を定めた環を $\mathcal{R}$ とする．$l \geq 0$ に対して，

$$P_l = \prod_{i=0}^{l-1}(V_2 - q^{i+\frac{1}{2}} - q^{-i-\frac{1}{2}}) \in \mathcal{R}$$

とおく．葉廣 [2] による議論により，先の部分代数 $(\bar{U}_q^{ev})^{\tilde{\otimes} n}$ から量子トレース $\mathrm{tr}_q^{P_{l_1}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{tr}_q^{P_{l_n}}$ を取ることで次の定理が得られる．

定理 2. L をフレーミング 0 の n 成分境界絡み目，$l_i, i = 1, \ldots, n$ を非負整数とする．このとき次が成り立つ．

$$J_{L;P_{l_1},\ldots,P_{l_n}} \in \frac{\{2l_j+1\}_q!}{\{1\}_q} I_{l_1} \cdots \hat{I}_{l_j} \cdots I_{l_n}, \tag{1}$$

ただし j は $l_j = \max\{l_i \mid i = i = 1, \ldots, n\}$ となる整数，また

$$I_l = \langle \{l-k\}_q!\{k\}_q!\{l\}_q! \mid k = 0, \ldots, l\rangle_{\text{ideal in } \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]}.$$

補足 3. $m \geq 1$ に対して $\Phi_m \in \mathbb{Z}[q]$ を m 次の円分多項式とする．このとき $\{2l+1\}_q!$，I_l はそれぞれ $\prod_m \Phi_m^{f(l,m)}$，$\prod_m \Phi_m^{f'(l,m)}$ で生成されるイデアルに含まれる． ただし

$$f(l,m) = \lfloor \frac{2l+1}{m} \rfloor, \quad f'(l,m) = \max\{0, \lfloor \frac{l-m+1}{m} \rfloor\} + \lfloor \frac{l}{m} \rfloor.$$

ここで $r \in \mathbb{Q}$ に対して $\lfloor r \rfloor$ は r 以下の最大の整数．よって *(1)* の左辺は

$$\Phi_1^{2(l_1+\cdots+l_n)} \prod_{m\geq 2} \Phi_m^{f(l_j,m)} \prod_{l_i \neq l_j} \Big(\prod_{m\geq 2} \Phi_m^{f'(l_i,m)}\Big)$$

で生成されるイデアルに含まれる．

<例>

- L をフレーミング 0 の n 成分境界絡み目とする．上記の定理で $l_1 = \cdots = l_n = 1, 2, 3$ とすると

$$\begin{aligned} J_{L;P_1,\ldots,P_1} &\in \Phi_1^{2n}\Phi_2\Phi_3\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}], \\ J_{L;P_2,\ldots,P_2} &\in \Phi_1^{4n}\Phi_2^{n+1}\Phi_3\Phi_4\Phi_5\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}], \\ J_{L;P_3,\ldots,P_3} &\in \Phi_1^{6n}\Phi_2^{2n+1}\Phi_3^{n+1}\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_7\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]. \end{aligned}$$

- フレーミング 0 とした 3 交点結び目 K_{3_1}, リボン結び目 K_{6_1} に対しては

$$J_{K_{3_1};P_1} = -q^{-1/2}\Phi_1^2\Phi_2\Phi_3, \quad J_{K_{6_1};P_1} = -q^{-5/2}\Phi_1^2\Phi_2\Phi_3\Phi_4.$$

  図 3 の底タングル C を閉じて得られる絡み目を L_C とおく．このとき

$$J_{L_C;P_1,P_1} = q^{3/4}\big\{q^{-3/2}\Phi_1(q^{1/2}-1)^2(q+q^{1/2}+1)\big\} \in q^{1/4}\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}].$$

  図 4 の底タングル B を閉じた Borromean 絡み目を L_B とおく．このとき

$$J_{B;P_1,P_1,P_1} = -q^{-7/2}\Phi_1^4\Phi_2\Phi_3.$$

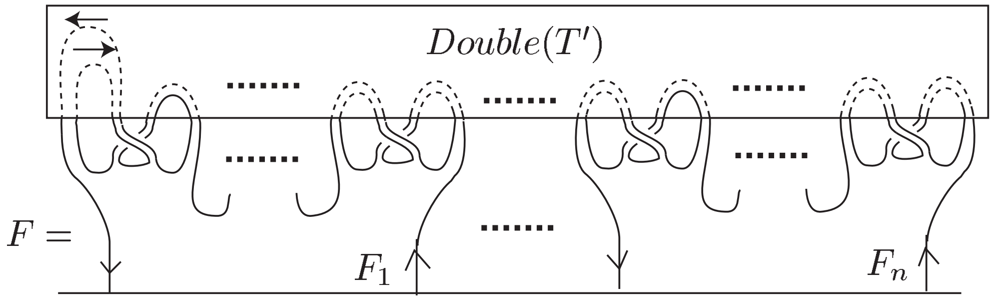


図 5: 互いに交わりを持たない Seifert 曲面 ($\partial F_i = T_i$) の集まり.

5　境界底タングルの普遍不変量

この節では定理 1 の証明の鍵となる命題を紹介する．$Y: U_h(sl_2)^{\hat{\otimes}2} \to U_h(sl_2)$ を次で定義する．

$$Y(\sum x \otimes y) = \sum_i \sum \bigl(x \triangleright \beta_i S((\alpha_i \triangleright y)_{(1)})\bigr)((\alpha_i \triangleright y)_{(2)}).$$

ただし 余積を $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ とおき，随伴作用を

$$x \triangleright y := \sum x_{(1)} y S(x_{(2)})$$

とおいた．$g, g_1, \ldots, g_n \geq 0$ に対して $\mu^{[g]}\colon U_h^{\hat{\otimes} g} \to U_h$，$\mu^{[g_1,\ldots,g_n]}\colon U_h^{\hat{\otimes}(g_1+\cdots+g_n)} \to U_h^{\hat{\otimes} n}$ を次で定義する．

$$\mu^{[g]}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_g) = x_1 x_2 \cdots x_g, \quad \mu^{[g_1,\ldots,g_n]} = \mu^{[g_1]} \otimes \cdots \otimes \mu^{[g_n]}.$$

命題 3 (葉廣 [1])**.** $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ をフレーミング 0 の境界底タングルとする．$F = F_1 \cup \cdots \cup F_n \in [0,1]^3$ を連結成分 n の曲面で，$i = 1, \ldots, n$ に対して各 F_i が T_i の *Seifert* 曲面となるようなものとする．F_i の種数 g_i とおく．このとき $2(g_1 + \cdots + g_n)$ 成分底タングル $T' = T'_1 \cup \cdots \cup T'_{2(g_1+\cdots+g_n)}$ で次の性質をみたすものが存在する．

$$J_T = \mu^{[g_1,\ldots,g_n]} Y^{\otimes(g_1+\cdots+g_n)}(J_{T'}).$$

実際，まず曲面 F を図 5 のように整える．すると上部の長方形内に，ある $2(g_1+\cdots+g_n)$ 成分底タングル T' を 2 重化した図が見える．ただし 2 重化した線の片方は向きが逆になっていることに注意．このような T' から，T は次の 2 ステップを経て得られる．

(ステップ 1) T' の $2i-1, 2i$ 番目の成分を 2 重化し，2 重化された片方の紐の向きを変え，図 6 のように下にパーツを付ける ($i = 1, \ldots, g_1 + \cdots + g_n$).

(ステップ 2) 前から順に $g_1, \ldots, g_n$ 成分ごとにくっつける (図 7).

ステップ 1 は $J_{T'}$ のテンソル積の $2i-1, 2i$ 番目の成分に Y を作用させることに対応している．ステップ 2 はステップ 1 で得られた底タングルの不変量 $Y^{\otimes(g_1+\cdots+g_n)}(J_{T'})$ に $\mu^{[g_1,\ldots,g_n]}$ を作用させることに対応している．

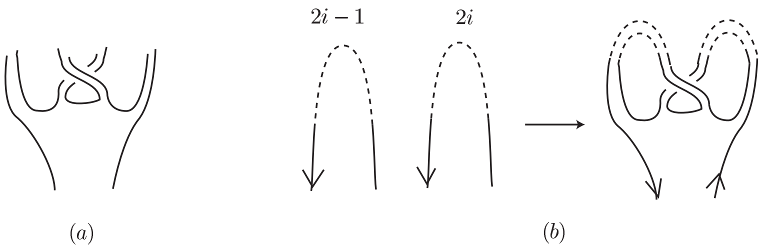


図 6: (a) パーツ.　(b) Step1.

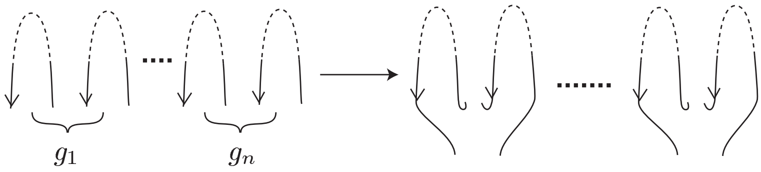


図 7: Step2.

参考文献

[1] K. Habiro, Bottom tangles and universal invariants. Alg. Geom. Topol. **6** (2006), 1113–1214.

[2] K. Habiro, A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariants for integral homology spheres. Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 1–81.

[3] R. J. Lawrence, A universal link invariant. in: The interface of mathematics and particle phisics (Oxford, 1988), 151–156, Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser., vol. 24, Oxford Univ. Press, New York, 1990.

[4] T. Ohtsuki, Colored ribbon Hopf algebras and universal invariants of framed links. J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), no. 2, 211–232.

[5] N. Y. Reshetikhin, V. G. Turaev, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. Comm. Math. Phys. **127** (1990), no. 1, 1–26.

[6] S. Suzuki, On the universal sl_2 invariant of ribbon bottom tangles. arXiv: 0905.1783, 2009.

Quantum $(\mathfrak{sl}_n, \wedge V_n)$ link invariant and matrix factorizations

米澤 康好 (名古屋大学大学院 多元数理科学研究科)

２００９年１２月２３日, 早稲田大学

1 圏化とは

圏化とは (代数構造を持った) 集合から (代数構造に対応する圏の構造を持った) 圏の対象集合への写像で反圏化 (decategorification) と呼ばれる”良い”逆写像が存在するものを言う．次は圏化の例である．

0 を含む自然数の集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を考える．集合の元 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ から $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間の圏 $\mathbb{C}$-$Vect$ の対象 $V_n := \langle e_1, e_2, ..., e_n \rangle$ への写像 ϕ を考える．ここで e_i $(i = 1, ..., n)$ は n 次元ベクトル空間の基底とする．

$$\phi: \quad \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C} - Vect$$

$$n \longmapsto V_n$$

写像 ϕ は反圏化を次元とする圏化である．次元は ϕ に対して次の意味で”良い”逆写像になっている．圏には写像という概念があるので V_n の同型類を考えることができる．V_n の同型類からどのベクトル空間を取っても, その空間の次元は n である．つまり, 集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の元たちは $\mathbb{C}$-$Vect$ の対象の同型類たちとして実現されている．そして $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は代数構造 $+$ と $\times$ を持つがこれらは $\mathbb{C}$-$Vect$ の中で $\oplus$ と $\otimes$ として実現される．さらに,$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を局所化した代数構造 $-$ を持つ整数の集合 $\mathbb{Z}$ を考える．この集合 $\mathbb{Z}$ から圏 $\mathcal{K}(\mathbb{C}$-$Vect)$ ($\mathbb{C}$-$Vect$ の複体の圏 Kom($\mathbb{C}$-$Vect$) のホモトピー圏) の中へ次のような圏化がある．

$$\overline{\phi}: \quad \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C} - Vect)$$

$$n - m \longmapsto (... \to 0 \to \overset{0}{V_n} \to \overset{1}{V_m} \to 0 \to ...)$$

写像 $\overline{\phi}$ は反圏化を Euler 標数 (次元の交代和) とする圏化である．
(積構造 $\times$ と well-defined であるにはもう少し工夫が必要である.)

次の事実は圏化をすることの有益な点である．

(B1) 代数構造を持つ集合の中の等式は圏のある完全系列から自然に得られる．集合の中で等式を探すことは非常に困難であるが, 写像の情報を持つ圏の中で完全系列を探すことの方が容易であり, 等式が自然に得られる．

(B2) 集合を複体の圏の中に圏化が実現できれば,集合の元 x の圏化 $\phi(x)$ のホモロジーの Poincaré 多項式 $x(t)$ は x の量子化である．ここで t は複体の次数に付随する形式的変数である．つまり $x(-1)=x$ である．

2 絡み目ホモロジーの歴史

Khovanov は絡み目の不変量である Jones 多項式 $J(q)$ をある複体の圏の対象で圏化した．そして, この複体のホモロジー $\mathrm{H}^{i,j}$ は Reidemeister 変形で不変なホモロジーであることを証明した．このホモロジーの Poincaré 多項式 J(q,t) は上の (B2) の意味で Jones 多項式の量子化になっており $J(q,-1)=J(q)$ を満たす．量子化された Jones 多項式 $J(q,t)$ は Jones 多項式 $J(q)$ では分類できなかった絡み目が分類できることが知られている．したがって, ジョーンズ多項式の圏化を用いた量子化 $J(q,t)$ は意味のある量子化となっている．

Jones 多項式は量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とその 2 次元ベクトル表現 V_2 に付随する絡み目量子不変量であるから, 一般に, 他の量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ とその既約表現 V_λ に付随する絡み目量子不変量に対して同様に圏化できないかと考えるのは自然である．実際,Khovanov と Rozansky は $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ とそのベクトル表現 V_n に付随する絡み目量子不変量 (HOMFLY 多項式) を行列因子化 (matrix factorization) の複体の圏の中で圏化をした．

これまで私は彼らの仕事を基にして $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ とその基本表現たち $\wedge^i V_n$ $(i=1,...,n-1)$ に付随する絡み目量子不変量 (色付 HOMFLY 多項式) を行列因子化の複体の圏の中で圏化することに取り組んできた．最近, 私が得た結果は (B2) の考え方を元に色付 HOMFLY 多項式を量子化し,3 変数の絡み目 (有理) 多項式不変量を定義したことである．まず色付 HOMFLY 多項式に対応する行列因子化の複体を定義した．このホモロジーの Poincaré 多項式を正規化して色付 HOMFLY 多項式の量子化に成功した．色付 HOMFLY 多項式では分類できなかった結び目が量子化された多項式では分類できることが期待できる．

3 Koszul 行列因子化

ここからの節は私の学位論文「Quantum $(\mathfrak{sl}_n, \wedge V_n)$ link invariant and matrix factorizations, 学位論文, 名古屋大学 多元数理科学研究科, 2009 年 10 月 (arXiv:0906.0220).」について解説する．

Khovanov ホモロジー (Jones 多項式の圏化) では次数付ベクトル空間 $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle$ [1] が幾何学的対象 ($\mathbb{R}^2$ の空間の S^1) に対応していた．しかし,HOMFLY-PT 多項式では幾何学的対象に 3 価平面図が現れ, この幾何学的対象をどのように代数で記述するかは問題であった．Khovanov と Rozansky は幾何学的対象である 3 価平面図を次数付 Koszul 行列因子化という代数的対象で記述できることを発見した．

[1] 本来は $\mathbb{Z}$ 係数次数付加群 $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$ であるが行列因子化の話と合わせる為に $\mathbb{Q}$ 上で話を進める．もう少し言うと $\mathbb{Z}$ 係数次数付加群 $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$ で議論を進めるとホモロジーに torsion$\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ が現れるのでより詳細な情報が得られる．では行列因子化を $\mathbb{Z}$ 上で議論すればより詳細な情報が得られるのではと誰もが思うであろう．しかし,$\mathbb{Z}$ 上で議論は相当難しいと思う．

定義 3.1 (Koszul 行列因子化)
次数付多項式環 $R := \mathbb{Q}[x_1, x_2, ..., x_k]$ (x_i は偶数次数を持つ) の斉次次数の多項式 a, b と自由[2] R 加群 M に対して *Koszul* 行列因子化 $K(a;b)_M$ は次で定義される *2* 巡回鎖.

$$\cdots \xrightarrow{b} M^0 \xrightarrow{a} M^1\{\tfrac{1}{2}(\deg b - \deg a)\} \xrightarrow{b} M^0 \xrightarrow{a} M^1\{\tfrac{1}{2}(\deg b - \deg a)\} \xrightarrow{b} \cdots.$$

ここで $M^i = M\ (i = 0, 1)$ で肩の i は次数を表し, 写像 a, b は積として M の元に作用する. 簡単の為

$$\left(M \xrightarrow{a} M\{\tfrac{1}{2}(\deg b - \deg a)\} \xrightarrow{b} M \right)$$

と略記される.

関手と呼ばれる圏への操作である,$\mathbb{Z}$ 次数のシフト $\{m\}$ と射を取り替える関手 $\langle 1 \rangle$ は次で定義される.

$$\begin{aligned} K(a;b)_M\{m\} &:= \left(M\{m\} \xrightarrow{a} M\{\tfrac{1}{2}(\deg b - \deg a) + m\} \xrightarrow{b} M\{m\}. \right), \\ K(a;b)_M \langle 1 \rangle &:= K(-b;-a)_M. \end{aligned}$$

二つの Koszul 行列因子化 $\overline{M}$, $\overline{N}$ が与えられるとテンソル積 $\overline{M} \boxtimes \overline{N}$ が得られる. いろいろな Koszul 行列因子化をテンソルして得られるものを対象とする圏 MF^{gr} を用いてホモロジーまたは (B2) の意味での量子化を行う. 以下の圏の対象の同型を認めてしまえば,テンソル積の定義を知らなくとも計算は可能である.

命題 3.2
(1) 0 でない有理数 c に対して

$$K(a;b)_M \simeq K(ca;c^{-1}b)_M.$$

(2) $K(a;b)_M \langle 1 \rangle \simeq K(b;a)_M \{\frac{1}{2}(\deg(b) - \deg(a))\}$
(3) a_i, b_i, b'_i $(i = 1, ..., m)$ を多項式環 R の斉次 $\mathbb{Z}$ 次数多項式, M を自由 R 加群とする. 多項式 a_1, ..., a_m が R の正則列[3]を成し, 次の条件を満たしているとする.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{m} a_i b'_i \,(=: \omega).$$

このとき,

$$\mathop{\boxtimes}_{j=1}^{m} K\left(a_j; b_j\right)_M \simeq \mathop{\boxtimes}_{j=1}^{m} K\left(a_j; b'_j\right)_M.$$

(4) (*Khovanov-Rozansky* による定理の一般化) $R = \mathbb{Q}[\underline{x}]$ を $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_l)$ で生成される多項式環, a_i, b_i $(1 \le i \le k)$ をさらに $\underline{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ も加えて生成される多項式環 $R[\underline{y}]$ の斉次 $\mathbb{Z}$ 次数多項式とする. M を自由 $R[\underline{y}]$ 加群とする. 多項式列 $\mathbf{a} = {}^t(a_1, a_2, ..., a_k)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1, b_2, ..., b_k)$ は次の条件を満たしているとする.

[2] 一般に R 加群は基底を持つとは限らないが R 加群で基底が存在しているものを自由 R 加群と言う. つまり R 加群として $M \simeq \oplus_{i=1}^{k} R\{a_i\}$, ここで $\{a_i\}$ は $a_i \in \mathbb{Z}$ の次数シフト.

[3] a_1, ..., a_m が R の正則列であるとは, すべての i について a_1, ..., a_i は商環 $R/\langle a_{i+1}, ..., a_m \rangle$ において零因子でない (つまりどのような $R/\langle a_{i+1}, ..., a_m \rangle$ の元と積をとっても 0 とならない) かつ $\langle a_1, ..., a_m \rangle R \neq R$

(i) $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \ (=: \omega) \in R$,

(ii) ある j が存在して, $b_j(\underline{x}, \underline{y}) \in R[\underline{y}]$ が $b_j(\underline{0}, \underline{y}) \neq 0$ を満たす.

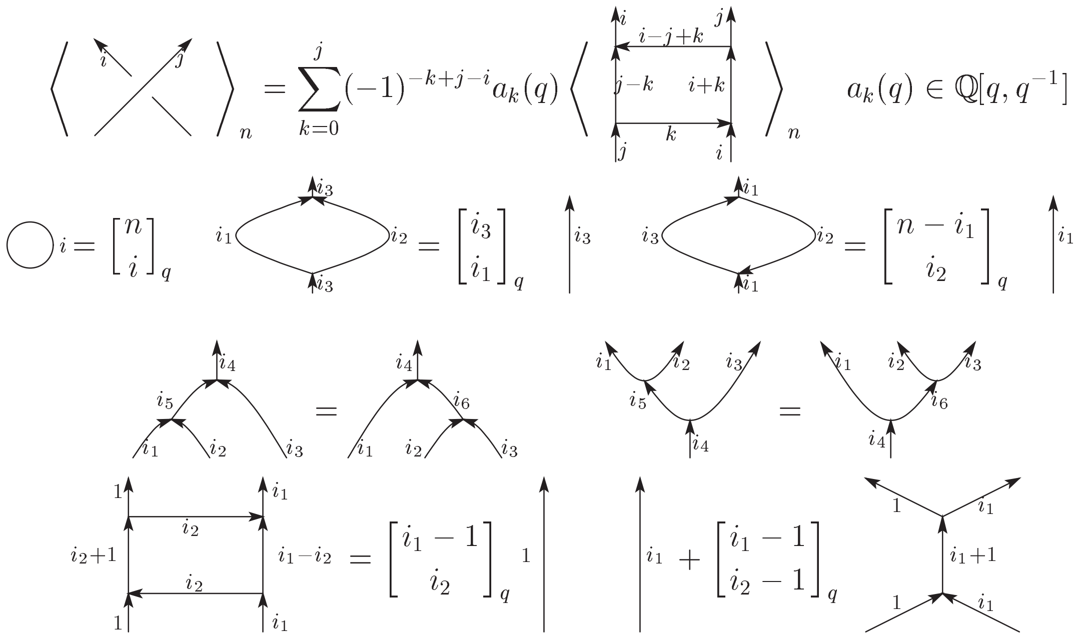
このとき,

$$K(\mathbf{a}; \mathbf{b})_M \simeq K(\overset{j}{\check{\mathbf{a}}}; \overset{j}{\check{\mathbf{b}}})_{M/b_j M}.$$

ここで $\overset{j}{\check{\mathbf{a}}}$ は第 j 成分を取り除いた列.

4 Quantum $(\mathfrak{sl}_n, \wedge V_n)$ link invariant

上記の行列因子化の圏を用いてタイトルにある「Quantum $(\mathfrak{sl}_n, \wedge V_n)$ link invariant」を量子化する. この量子不変量は村上斉氏, 大槻知忠氏, 山田修司氏によって色付平面図による状態和表示が与えられており, これを補正した絡み目不変量を (B2) の思想を用いて量子化をした.



他いくつかの関係式がある.

色付交点は色付３価平面図が組み合わさった平面図の線形和で展開されるている. したがって色付曲線や色付３価平面図に対して行列因子化を定義し, それらを張り合わせること (テンソル積をとること) で組み合わさった平面図を行列因子化で記述することをする.

5 一般化された対称多項式と冪和

色付３価平面図の行列因子化を定義をする前に必要な多項式を導入する. $x_{k,i}$ を次数 $2k$($k \in \mathbb{N}$, i:添え字) の変数で,$k = 0$ のときは $x_{0,i} = 1$ とする. $\mathbb{X}^{(m)}_{(i)}$ を m 個の変数 $x_{l,i}$ $(1 \leq l \leq m)$ の列とする.

$$\mathbb{X}^{(m)}_{(i)} = (x_{1,i}, x_{2,i}, ..., x_{m,i}).$$

正整数の列 $(m_1, m_2, ..., m_k)$ と添え字の列 $(i_1, i_2, ..., i_k)$ に対して, $R^{(m_1,m_2,...,m_k)}_{(i_1,i_2,...,i_k)}$ を $\mathbb{X}^{(m_1)}_{(i_1)}$, $\mathbb{X}^{(m_2)}_{(i_2)}$, ..., $\mathbb{X}^{(m_k)}_{(i_k)}$ の変数たちで生成される多項式環とする.

$$R^{(m_1,m_2,...,m_k)}_{(i_1,i_2,...,i_k)} = \mathbb{Q}[x_{1,i_1}, x_{2,i_1}, ..., x_{m_1,i_1}, ..., x_{1,i_k}, x_{2,i_k}, ..., x_{m_k,i_k}].$$

定義 5.1
$s(m)(m \in \mathbb{Z})$ を非負整数に対して 1, 負整数に対して -1 に値をもつ関数とする. 正整数の列 $(m_1, m_2, ..., m_k)$ と添え字の列 $(i_1, i_2, ..., i_k)$ に対して, $X^{(m_1,m_2,...,m_l)}_{(i_1,i_2,...,i_l)}$ を $\mathbb{X}^{(m_k)}_{(i_k)}$ $(k = 1, ..., l)$ の多項式からなる有理多項式

$$\prod_{k=1}^{l}(1 + x_{1,i_k} + ... + x_{|m_k|,i_k})^{s(m_k)}$$

$X^{(m_1,m_2,...,m_l)}_{m,(i_1,i_2,...,i_l)}$ を $X^{(m_1,m_2,...,m_l)}_{(i_1,i_2,...,i_l)}$ の次数が $2m$ の単項式たちからなる多項式とする.
例えば,

$$\begin{aligned}
X^{(1,-2,3)}_{(i_1,i_2,i_3)} &= \frac{(1 + x_{1,i_1})(1 + x_{1,i_3} + x_{2,i_3} + x_{3,i_3})}{(1 + x_{1,i_2} + x_{2,i_2})}, \\
X^{(1,-2,3)}_{3,(i_1,i_2,i_3)} &= \frac{(1 + x_{1,i_1})(1 + x_{1,i_3} + x_{2,i_3} + x_{3,i_3})}{(1 + x_{1,i_2} + x_{2,i_2})} \text{の次数 6 の多項式} \\
&= 2x_{1,i_2}x_{2,i_2} - x^3_{1,i_2} + (-x_{2,i_2} + x^2_{1,i_2})(x_{1,i_1} + x_{1,i_3}) \\
&\quad -x_{1,i_2}(x_{2,i_3} + x_{1,i_1}x_{1,i_3}) + x_{3,i_3} + x_{1,i_1}x_{2,i_3}.
\end{aligned}$$

注意 5.2
上記のように書き下すと多項式が複雑で, どのように振る舞うかが良く解らない. しかし, 多項式たちを $X^{(m_1,m_2,...,m_l)}_{(i_1,i_2,...,i_l)}$ のようにまとめて記述することで議論が明確になる.

$\mathbb{X}^{(m_1,m_2,...,m_l)}_{(i_1,i_2,...,i_l)}$ を $X^{(m_1,m_2,...,m_l)}_{m,(i_1,i_2,...,i_l)}$ $(m \in \mathbb{N}_{\geq 1})$ の列とする

$$\mathbb{X}^{(m_1,m_2,...,m_l)}_{(i_1,i_2,...,i_l)} = (X^{(m_1,m_2,...,m_l)}_{m,(i_1,i_2,...,i_l)})_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}}.$$

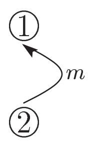
i を添え字とする変数 $t_{1,i}$, $t_{2,i}$, ..., $t_{m,i}$ を考える. ここでどの変数も次数は 2 とする. これらの変数からなる冪和 $t^{n+1}_{1,i} + t^{n+1}_{2,i} + ... + t^{n+1}_{m,i}$ を基本対称式 $x_{j,i} = \sum_{1 \leq k_1 < ... < k_j \leq m} t_{k_1,i}...t_{k_j,i}$ $(1 \leq j \leq m)$ で書き下した多項式を $F_m(x_{1,i}, x_{2,i}, ..., x_{m,i})$ または $F_m(\mathbb{X}^{(m)}_{(i)})$ として表す. つまり,

$$F_m(\mathbb{X}^{(m)}_{(i)}) = F_m(x_{1,i}, x_{2,i}, ..., x_{m,i}) = t^{n+1}_{1,i} + t^{n+1}_{2,i} + ... + t^{n+1}_{m,i}.$$

6 行列因子化と色付 3 価平面図

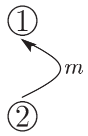
上記の多項式を用いて平面図に対応する行列因子化を定義する.

定義 6.1
端点に添え字が付けられた色付曲線を考える.



$(1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{n}),$

この曲線に対する行列因子化を

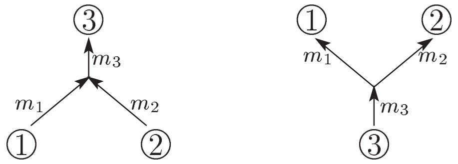


$$\mathcal{C}\Big(\qquad\Big)_n := \mathop{\boxtimes}_{j=1}^{m} K\Big(L^{[m]}_{j,(1;2)}; X^{(m)}_{j,(1)} - X^{(m)}_{j,(2)}\Big)_{R^{(m,m)}_{(1,2)}} \tag{1}$$

で定義する．ここで $L^{[m]}_{j,(1;2)}$ は以下の多項式

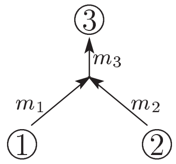
$$\frac{F_m(X^{(m)}_{1,(2)},\dots,X^{(m)}_{j-1,(2)},X^{(m)}_{j,(1)},\dots,X^{(m)}_{m,(1)}) - F_m(X^{(m)}_{1,(2)},\dots,X^{(m)}_{j,(2)},X^{(m)}_{j+1,(1)},\dots,X^{(m)}_{m,(1)})}{X^{(m)}_{j,(1)} - X^{(m)}_{j,(2)}}.$$

端点に添え字が付けられた色付３価平面図を考える．



$$(2 \le m_3 = m_1 + m_2 \le n).$$

左側の３価平面図に対する行列因子化を

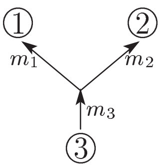


$$\mathcal{C}\Big(\qquad\Big)_n := \mathop{\boxtimes}_{j=1}^{m_3} K\Big(\Lambda^{[m_1,m_2]}_{j,(3;1,2)}; X^{(m_3)}_{j,(3)} - X^{(m_1,m_2)}_{j,(1,2)}\Big)_{R^{(m_1,m_2,m_3)}_{(1,2,3)}}, \tag{2}$$

ここで $\Lambda^{[m_1,m_2]}_{j,(3;1,2)}$ は以下の多項式

$$= \frac{F_{m_3}(\dots,X^{(m_1,m_2)}_{j-1,(1,2)},X^{(m_3)}_{j,(3)},X^{(m_3)}_{j+1,(3)},\dots) - F_{m_3}(\dots,X^{(m_1,m_2)}_{j-1,(1,2)},X^{(m_1,m_2)}_{j,(1,2)},X^{(m_3)}_{j+1,(3)},\dots)}{X^{(m_3)}_{j,(3)} - X^{(m_1,m_2)}_{j,(1,2)}}.$$

右側の３価平面図に対する行列因子化を



$$\mathcal{C}\Big(\qquad\Big)_n := \mathop{\boxtimes}_{j=1}^{m_3} K\Big(V^{[m_1,m_2]}_{j,(1,2;3)}; X^{(m_1,m_2)}_{j,(1,2)} - x^{(m_3)}_{j,(3)}\Big)_{R^{(m_1,m_2,m_3)}_{(1,2,3)}}\{-m_1 m_2\}, \tag{3}$$

ここで $V^{[m_1,m_2]}_{j,(1,2;3)}$ は以下の多項式

$$= \frac{F_{m_3}(\dots,X^{(m_3)}_{j-1,(3)},X^{(m_1,m_2)}_{j,(1,2)},X^{(m_1,m_2)}_{j+1,(1,2)},\dots) - F_{m_3}(\dots,X^{(m_3)}_{j-1,(3)},X^{(m_3)}_{j,(3)},X^{(m_1,m_2)}_{j+1,(1,2)},\dots)}{X^{(m_1,m_2)}_{j,(1,2)} - X^{(m_3)}_{j,(3)}}.$$

一般の色付３価平面図に対する行列因子化を上で定義した３価平面図たちを張り合わせることで定義する．その張り合わせは次のようにして定義される．

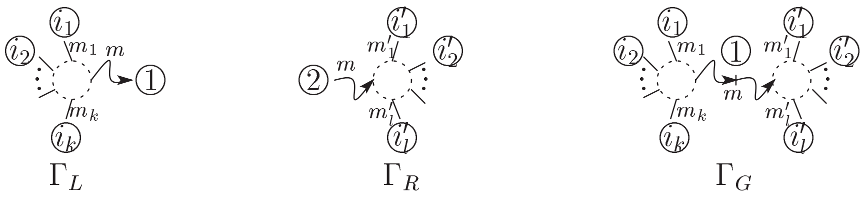


図 1: 色付平面図の張り合わせ 1

定義 6.2
３価平面図 Γ を２つの３価平面図 Γ_1 と Γ_2 の（共通の成分のない）和からなるとする．Γ_1 と Γ_2 の行列因子化が解っていると仮定しよう．それら行列因子化を $\mathcal{C}(\ \Gamma_1\ )_n, \mathcal{C}(\ \Gamma_2\ )_n$ として表す．Γ に対する行列因子化を Γ_1 と Γ_2 の行列因子化のテンソル積として定義する．

$$\mathcal{C}(\ \Gamma\ )_n := \mathcal{C}(\ \Gamma_1\ )_n \boxtimes \mathcal{C}(\ \Gamma_2\ )_n.$$

図１の左と中央にある端点に添え字が付けられた３価平面図 Γ_L と Γ_R を考える．左の平面図 Γ_L は色 m で端点方向に向きを持った足を持ち,中央の平面図 Γ_R は色 m で端点方向からの向きを持った足を持っている.このように足の色が等しく足の向きが異なるっているところでのみ張り合わせを行う．これら３価平面図 Γ_L と Γ_R を張り合わせると図１の右の平面図 Γ_G が得られる.

定義 6.3
Γ_G の行列因子化は Γ_L と Γ_R の行列因子化 $\mathcal{C}(\ \Gamma_L\ )_n$ と $\mathcal{C}(\ \Gamma_R\ )_n$ のテンソル積を取り,張り合わさった端点の添え字を一致させることで定義する.

$$\mathcal{C}(\Gamma_G)_n := \mathcal{C}(\Gamma_L)_n \boxtimes \mathcal{C}(\Gamma_R)_n \Big|_{\mathbb{X}^{(m)}_{(2)}=\mathbb{X}^{(m)}_{(1)}}.$$

図 2: 色付平面図の張り合わせ２

図２左の端点に添え字が付けられた色付３価平面図 Γ_T を考える．この平面図には隣り合う二つの足で張り合せられる条件を満たすものがあるので,それら端点を張り合わせて図２右の色付３価平面図 Γ_C を得る.

定義 6.4
Γ_C の行列因子化は Γ_T の行列因子化 $\mathcal{C}(\Gamma_T)_n$ の張り合わさった端点の添え字を一致させることで定義する.

$$\mathcal{C}(\Gamma_C)_n := \mathcal{C}(\Gamma_T)_n|_{\mathbb{X}^{(m)}_{(2)}=\mathbb{X}^{(m)}_{(1)}}.$$

命題3.2やその系を用いて次の主張が得られる.

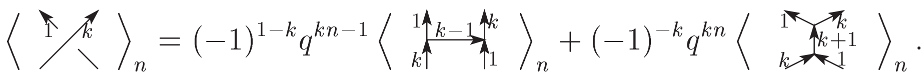
命題 6.5
4節で3価平面図の間のいくつかの関係式は行列因子化の圏の中での同型として得られる[4].

7 行列因子化の複体と $[1,k]$ 交点

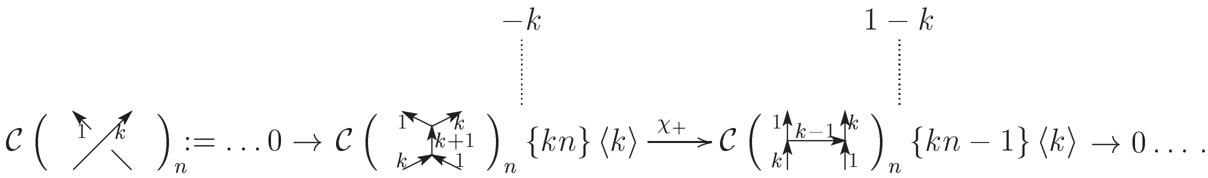
6節で定義した平面図の行列因子化を使って, まずは片側の紐の色が1の交点 ($[1,k]$ 交点または $[k,1]$ 交点と呼ぶ) について考える.

図 3: 正 $[1,k]$ 交点, 負 $[1,k]$ 交点, 正 $[k,1]$ 交点, 負 $[k,1]$ 交点

Quantum $(\mathfrak{sl}_n, \wedge V_n)$ link invariant を求める際, 正 $[1,k]$ 交点の平面図への展開式は以下の式である.



これを元に私は正 $[1,k]$ 交点に対する行列因子化の複体を定義した.

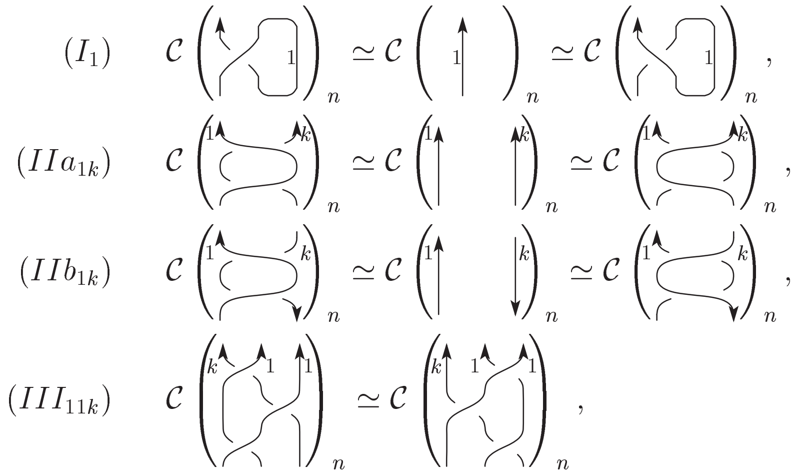


注意としては複体の境界写像（行列因子化の間の射像）χ_+ は明示的に書き下しているので, 与えられた $[1,k]$ 交点のみを持つ結び目に対してこの定義を用いて得られる複体はホモロジーを具体的に求められる構成になっている[5].
この定義を用いて得られる複体には次の同型がある.

定理 7.1 (主定理1（$k=1$ の時 Khovanov-Rozansky）)
*Reidemeister*変形で移り合う $[1,k]$ 交点または $[k,1]$ 交点からなる色付タングル図を考えると, そ

[4]Hao Wu も独立にこの関係式を与えている. H. Wu, Matrix factorizations and colored MOY graphs, arXiv:0803.2071.
[5]Hao Wu や Ben Webster, Geordie Williamson の構成は境界写像の存在しか述べていないのでホモロジーを求めることはできない.

れらタングル図に対応する行列因子化の複体は同型.



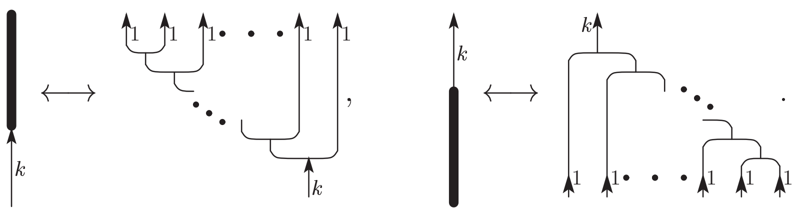
適当に色を取り替えた者に対しても同様に同型が成立する.

8 行列因子化の複体と $[i,j]$ 交点

一般の $[i,j]$ 交点に対しても行列因子化の複体（Reidemeister 変形で移り合うタングル図の行列因子化の複体が同型となるもの）を定義することを考えたい. しかし, これは技術的にとても困難である. 具体的には境界写像を明示的に記述できるかが良く解らない. また明示的に記述できたとしても Reidemeister 変形で移り合うタングル図の複体が同型になるかを調べるのも困難である.

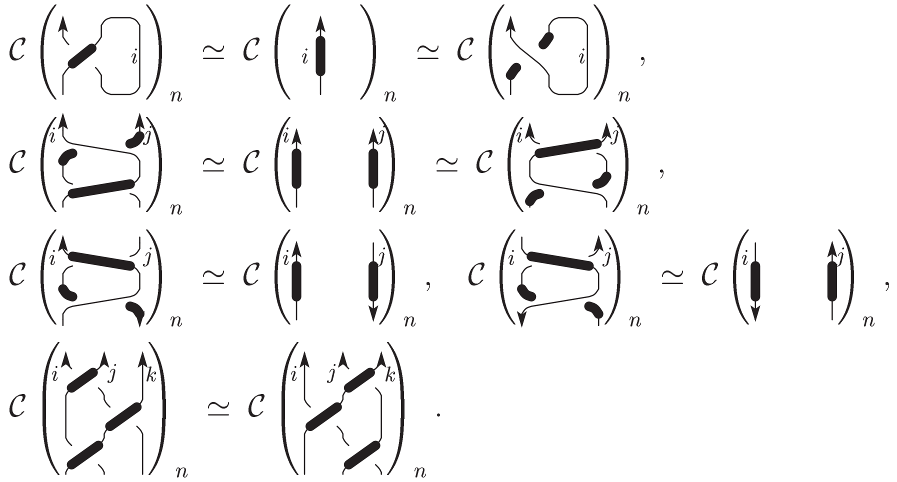
図 4: 仮想正 $[i,j]$ 交点, 仮想負 $[i,j]$ 交点

私は図 4 の仮想的な $[i,j]$ 交点を考えることで (B2) の思想の元,Quantum $(\mathfrak{sl}_n, \wedge V_n)$ link invariant の量子化を行った. ここで色 i の中間に現れている太った紐は i 本の色 1 の紐の束を表す.

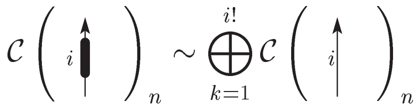


つまり, 仮想 $[i,j]$ 交点はすべて $[i,1]$ 交点だけから成るので, 前節で定義した $[i,1]$ 交点に対する行列因子化の複体を使って仮想 $[i,j]$ 交点に対する行列因子化の複体を与えることができる. $[i,1]$ 交点の複体から構成されているので, この仮想 $[i,j]$ 交点の複体の境界写像も明示的に書き下すことができる. したがってホモロジーが求められる構成になっている. さらに, この仮想 $[i,j]$ 交点の複体の構成から次の同型が得られた.

定理 8.1 (主定理２)



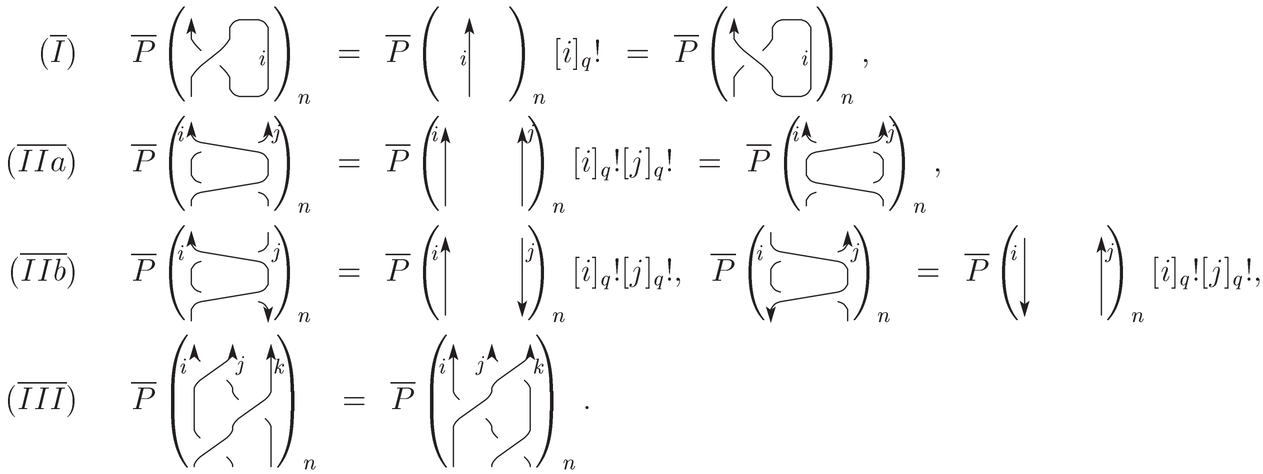
仮想的に太らせた線と元々のオリジナルの線の行列因子化としての関係は以下のものである.



主定理２は"いくつかのタングル図の行列因子化の複体を直和すると Reidemeister 変形で移り合うタングル図の複体は同型となる" という主張で, 定理からオリジナルの $[i,j]$ 色付交点の複体の情報を取り出さねばならない. ここまででは絡み目ホモロジーはできてない[6].

しかし (B2) の思想を使えば,(有理) 多項式不変量[7]が得られる. まず, 与えられた色付絡み目図 D にある交点を仮想的な交点に取替えて仮想色付絡み目図 D' を考える. さらにこの D' の行列因子化の複体のホモロジーを考え, この Poincaré 多項式 $\overline{P}(D)$ を考えると Reidemeister 変形で以下のずれが生じることが主定理２から解る.

系 8.2



---

[6]本来はここからオリジナルの情報を取り出すことを考えてホモロジー不変量を構成したかったのだが, それは今までに無い新しい圏を作る操作を構成しなければならないため, 慎重に議論する必要がある.

[7]注意として得られた不変量は有理多項式ではなく, 多項式不変量となることが予想である. また３変数の内の１変数 s は $s^2=1$.

このずれを補正することで新しい絡み目の３変数（有理）多項式不変量 P(D) を定義する．その補正は以下のように行う．

Cr_k $(k = 1, ..., n-1)$ を色付絡み目図 D の関数で以下で定義される．

$$\mathrm{Cr}_k(D) := D \text{ に含まれる } [*, k] \text{ 交点の数.}$$

正規化された Poincaré 多項式 $P(D)$ を次で定義する．

$$P(D) := \overline{P}(D) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{([k]_q!)^{\mathrm{Cr}_k(D)}}.$$

この（有理）多項式は色付き絡み目の不変量となることが系 8.2 から解る．

定理 8.3
P(D) は色付き絡み目の不変量．

9　まとめと感謝

後半の主定理から不変量 $P(D)$ までの構成はかなり駆け足となってしまったが, 私自身は 6 節のもっとも基本的な３価平面図の行列因子化の”正しい”定義を与えたことが重要だと考えている．それ以降の構成は技術的なアイデアを導入したものの, 複体の定義は量子不変量が設計図となってくれるので自然と得られる.. 得られた定理も線形代数（良い基底をとって基底の表現行列を書き下す）の計算しか本質的に使っていない.

最後になりますが, 講演の機会と報告集を書く機会をくださいました谷山先生, 花木先生に大変感謝をしております.

「On the Hurwitz orbits of Coxeter type」

矢口義朗（広島大学理学研究科博士課程後期２年）

アブストラクト. Hurwitz 作用は，群 G の n 個の直積 G^n への n 次ブレイド群 B_n の自然な作用として定義されるもので，低次元トポロジーなどでモノドロミーが扱われている対象を研究する上での代数的な道具である.

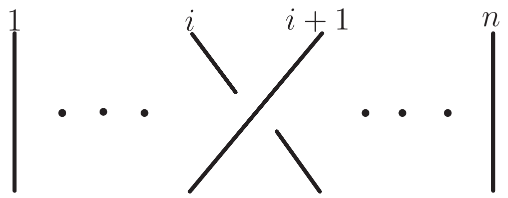
さて，G^n の各元の Hurwitz 軌道（Hurwitz 作用による軌道）は，それぞれあるアルチン群の標準的生成元を適当に n 個（重複は許す）並べた組の Hurwitz 軌道からの自然な全射を持つ．したがって，Hurwitz 軌道を調べる研究においては，アルチン群の標準的生成元の組の Hurwitz 軌道を調べることが重要となる.

今回は，アルチン群が Coxeter 型（有限型とも呼ばれる）の場合における，標準的生成元の組の Hurwitz 軌道について報告する.

1 Hurwitz 作用

n 次ブレイド群 B_n の表示が標準的生成元 $\sigma_1, \cdots \sigma_{n-1}$（$\sigma_i$ は下の図のようなブレイドの同値類）を用いて，次で与えられることはよく知られている.

$$\left\langle \sigma_1, \cdots \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rl} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & (|i-j|=1) \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & (|i-j|>1) \end{array} \right\rangle$$



ところで，n 次ブレイド群 B_n は，群 G の n 個の直積 G^n へ次のように右から作用する（<u>B_n の Hurwitz 作用</u>と呼ばれている）：

$$\begin{aligned}&(g_1, \cdots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots g_n) \cdot \sigma_i \\ &= (g_1, \cdots, g_{i-1}, g_{i+1}, {g_{i+1}}^{-1} g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_n)\end{aligned}$$

以下では，$(g_1, \cdots, g_n) \in G^n$ の Hurwitz 軌道（Hurwitz 作用による軌道）を，単に $(g_1, \cdots, g_n) \cdot B_n$ と書く.

定義 1.1. $(g_1, \cdots, g_n), (g'_1, \cdots, g'_n) \in G^n$ とする.
(1) $(g_1, \cdots, g_n), (g'_1, \cdots, g'_n)$ が <u>B_n 同値</u>であるとは，$(g_1, \cdots, g_n) \in (g'_1, \cdots g'_n) \cdot B_n$ となるときをいう.
(2) $(g_1, \cdots, g_n), (g'_1, \cdots, g'_n)$ が <u>BC_n 同値</u>であるとは，ある $h \in G$ が存在して，$(h^{-1}g_1h, \cdots, h^{-1}g_nh) \in (g'_1, \cdots, g'_n) \cdot B_n$ となるときをいう.

B_n 同値や BC_n 同値を研究することは，Braided Surface や Lefschetz fibration などモノドロミーが登場する低次元トポロジーの対象を研究することと，密接な関係がある (cf. [**1**],[**4**]).

2　主結果

アルチン群とは，次の表示を持つ群である：

$$< t_1, \cdots, t_n | \pi(t_i, t_j, m_{ij}) = \pi(t_j, t_i, m_{ji}), 1 \leqq i \neq j \leqq n > .$$

ただし，$1 \leqq i \neq j \leqq n$ に対して，m_{ij} は 2 以上の整数かつ $m_{ij} = m_{ji}$ であり，$\pi(t_i, t_j, m_{ij})$ は長さ m_{ij} の積 $t_i t_j t_i \cdots$ を表す（例えば，$m_{ij} = 3$ ならば $\pi(t_i, t_j, m_{ij}) = t_i t_j t_i$）.

マーク付きグラフとは，頂点 $t_1, \cdots, t_n$ $(n \geqq 2)$ をもつ（連結とは限らない）単純グラフ（ループと多重辺を持たないグラフ）で，$1 \leqq i \neq j \leqq n$ を満たす各 i, j に対して，次のいずれかの条件をみたすものとする：
(a)2 頂点 t_i, t_j の間に辺がない.
(b)2 頂点 t_i, t_j は，ラベルの付いていない辺で結ばれている.
(c)2 頂点 t_i, t_j は，整数値のラベル $m(\geqq 4)$ がついた辺で結ばれている.

n 個の頂点 $t_1, \cdots, t_n$ を持つマーク付きグラフ X_n に対して，アルチン群 $A(X_n)$（X_n に付随するアルチン群という）を以下で定める：
(I) 生成子は $t_1, \cdots, t_n$（X_n に付随する標準的生成元という）.
(II) 関係式は，各 $1 \leqq i \neq j \leqq n$ に対して，$\pi(t_i, t_j, m_{ij}) = \pi(t_j, t_i, m_{ji})$．ただし，
・$m_{ij} = m_{ji} = 2$（t_i, t_j が条件 (a) をみたすとき）.
・$m_{ij} = m_{ji} = 3$（t_i, t_j が条件 (b) をみたすとき）.
・$m_{ij} = m_{ji} = m(\geqq 4)$（$t_i, t_j$ が条件 (c) をみたすとき）.

次の定理が本講演の主結果である：

定理 2.1. X_n が Coxeter グラフならば，任意の置換 $\varphi \in Sym\{1, \cdots, n\}$ に対して，$(t_1, \cdots, t_n)$ と $(t_{\varphi(1)}, \cdots, t_{\varphi(n)})$ は BC_n 同値である．ただし，$t_1, \cdots, t_n$ は X_n に付随する標準的生成元である.

ここで，Coxeter グラフとは，図 2.1 に登場する連結なマーク付きグラフ 1 つ 1 つ，またそれらいくつかの非交和をいう．X_n が Coxeter グラフのとき，$A(X_n)$ は Coxeter 型（または有限型）であるという．なお，$A(\mathcal{A}_n)$ は $n+1$ 次ブレイド群 B_{n+1} と同型である．実際，$\mathcal{A}_n$ に付随する標準的生成元 $t_1, \cdots, t_n$ は，B_{n+1} の標準的生成元 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ とそれぞれ同一視できる.

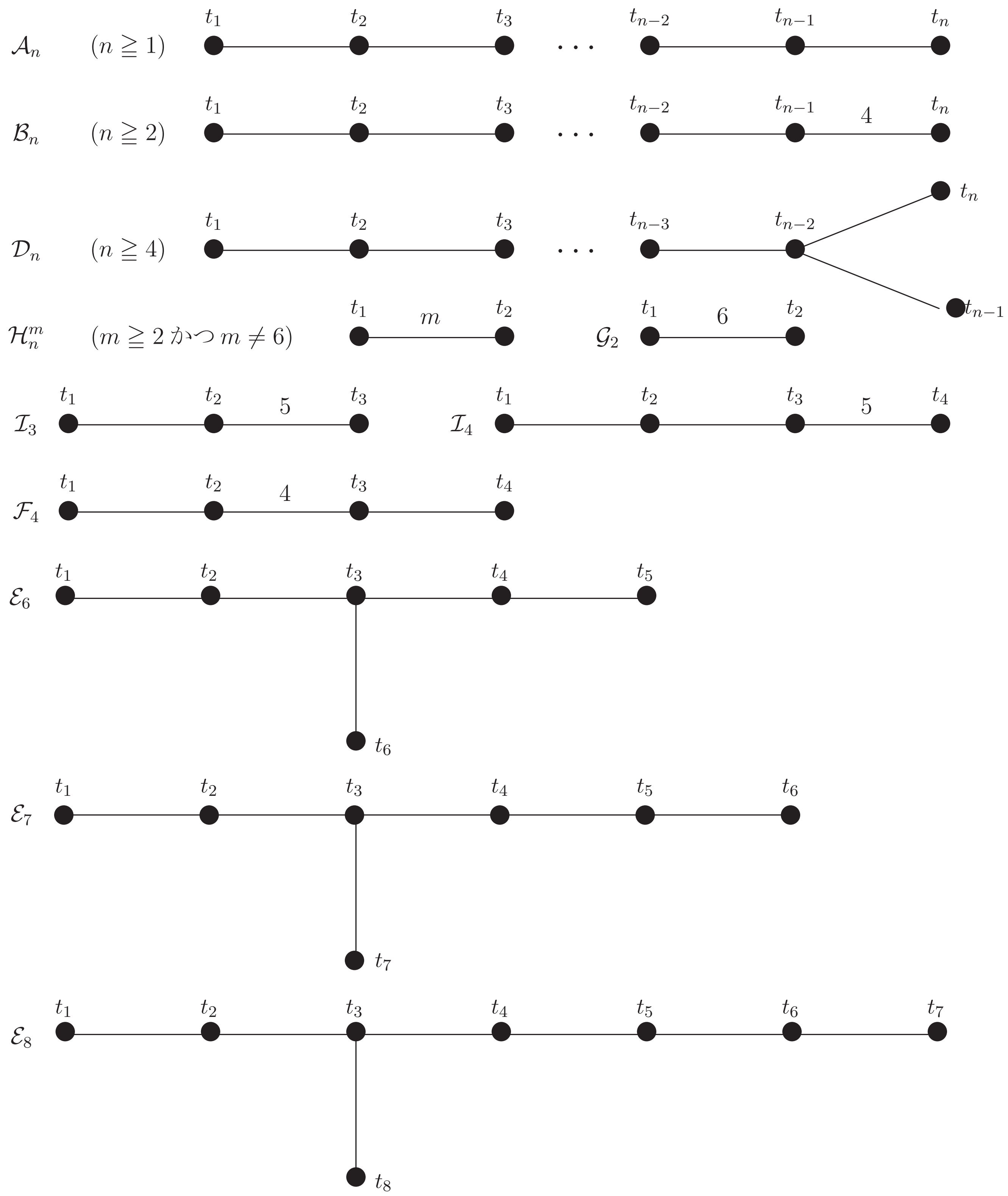

$\mathcal{A}_n$ $(n \geqq 1)$
t_1 t_2 t_3 $\cdots$ t_{n-2} t_{n-1} t_n
$\mathcal{B}_n$ $(n \geqq 2)$
t_1 t_2 t_3 $\cdots$ t_{n-2} t_{n-1} 4 t_n
$\mathcal{D}_n$ $(n \geqq 4)$
t_1 t_2 t_3 $\cdots$ t_{n-3} t_{n-2} t_n t_{n-1}
$\mathcal{H}_n^m$ $(m \geqq 2$ かつ $m \neq 6)$
t_1 m t_2
$\mathcal{G}_2$
t_1 6 t_2
$\mathcal{I}_3$
t_1 t_2 5 t_3
$\mathcal{I}_4$
t_1 t_2 t_3 5 t_4
$\mathcal{F}_4$
t_1 t_2 4 t_3 t_4
$\mathcal{E}_6$
t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6
$\mathcal{E}_7$
t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7
$\mathcal{E}_8$
t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8

図 2.1

注意．図 2.2 は，マーク付きグラフであるが，Coxeter グラフではない．これは定理 2.1 の結論が成り立たないグラフの例である（証明は略）．

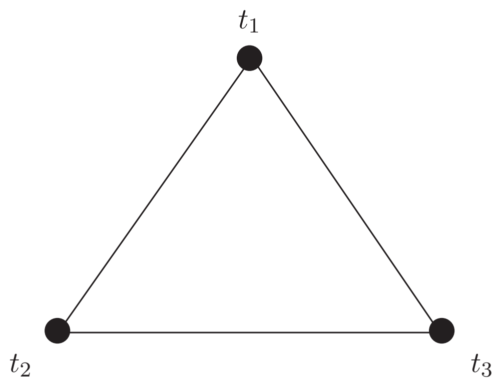


図 2.2

系 2.2. X_n を**連結な**マーク付きグラフとし，$t_1, \cdots, t_n$ をそれに付随する標準的生成元とする．このとき，任意の置換 $\varphi \in Sym\{1, \cdots, n\}$ に対して，Hurwitz 軌道 $(t_{\varphi(1)}, \cdots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n$ の位数は次の表で与えられる：

X_n	$\#((t_{\varphi(1)}, \cdots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n)$
$\mathcal{A}_n$	$(n+1)^{n-1}$
$\mathcal{B}_n$	n^n
$\mathcal{D}_n$	$2(n-1)^n$
$\mathcal{H}_2^m$	m
$\mathcal{I}_3$	50
$\mathcal{I}_4$	1350
$\mathcal{F}_4$	432
$\mathcal{E}_6$	41472
$\mathcal{E}_7$	unkown
$\mathcal{E}_8$	unkown
それ以外	無限大

注意．X_n が Coxter グラフでないならば，位数 $\#((t_{\varphi(1)}, \cdots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n)$ は無限大である事は既に証明されている ([**3,5**])．X_n が（$\mathcal{E}_7$ と $\mathcal{E}_8$ を除く）Coxeter グラフのときの位数については，$\varphi = id$ の場合が既に上のように求められている ([**6**])．ところが，BC_n 同値は軌道の位数を変えないので（共役によって軌道が "平行移動" するだけなので），定理 2.1 より，任意の φ に対しても [**6**] の結果がそのまま成り立つ．ゆえに上の系を得た．

3　φ-good

置換 $\varphi \in Sym\{1, \cdots, n\}$ を一つ固定する．

この章では，$X_n = \mathcal{A}_n$ の場合における Hurwitz 軌道 $(t_{\varphi(1)}, \cdots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n$ を求めた結果を報告する．ただし $t_1, \cdots t_n$ は，$\mathcal{A}_n$ に付随する標準的生成元である．

$A(\mathcal{A}_n) = B_{n+1}$ であり，B_{n+1} の標準的生成元 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ を用いて，$t_i = \sigma_i$ と見なせた．そこで B_{n+1} の標準的生成元を $t_1, \cdots, t_n$ と書くことにする．

$\mathrm{A} = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \leqq k \leqq n, \varphi^{-1}(k-1) < \varphi^{-1}(k)\}$ とおく．

このとき，$1 \leqq i < j \leqq n+1$ に対して，B_{n+1} の元 t^{φ}_{ij} を次で定義する：

$$t^{\varphi}_{ij} = t_{j-1}^{-\epsilon_{j-1}} t_{j-2}^{-\epsilon_{j-2}} \cdots t_{i+2}^{-\epsilon_{i+2}} t_{i+1}^{-\epsilon_{i+1}} t_i t_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} t_{i+2}^{\epsilon_{i+2}} \cdots t_{j-2}^{\epsilon_{j-2}} t_{j-1}^{\epsilon_{j-1}}$$

但し，$\epsilon_k = 1 \ (k \in \mathrm{A})$, $\epsilon_k = -1 \ (k \notin \mathrm{A})$ である．

t_{ij} を φ に付随するバンド生成元 と呼ぶ．

また，集合 Σ^{φ} を $\Sigma^{\varphi} = \{t^{\varphi}_{ij} \in B_{n+1} \mid 1 \leqq i < j \leqq n+1\}$ で定義する．

$1 \leqq k \leqq n+1$ に対して，$\mathrm{P}_k = (k, 0) \in \mathbb{R}^2$ とする．

C_1 を $\mathbb{R}^2$ 内の円周で，2 点 P_1，P_{n+1} を通り，線分 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{n+1}}$ を直径に持つものとする．

今，C_1 上に点 Q_k $(1 \leqq k \leqq n+1)$ を次のようにとる：

・$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{P}_1$, $\mathrm{Q}_{n+1} = \mathrm{P}_{n+1}$

・$2 \leqq k \leqq n$ に対して，$\mathrm{Q}_k = (k, y_k)$．ただし，$y_k < 0 \ (k \in \mathrm{A})$，$y_k > 0 \ (k \notin \mathrm{A})$.

このとき，線分 $\overline{\mathrm{Q}_i\mathrm{Q}_j}$ を，t^{φ}_{ij} に対応する線分 と呼ぶ．

例 3.1. $n = 4$ とし，$(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4)) = (4, 3, 1, 2)$ とする．このとき，$\mathrm{A} = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \leqq k \leqq 4, \varphi^{-1}(k-1) < \varphi^{-1}(k)\} = \{2\}$ であり，

(1)　$t^{\varphi}_{14} \in \Sigma^{\varphi}$ は，$t^{\varphi}_{14} = t_3 {t_2}^{-1} t_1 t_2 {t_3}^{-1}$（図 3.1）である．

(2)　図 3.2 は，$t^{\varphi}_{14} \in \Sigma^{\varphi}$ に対応する線分である．

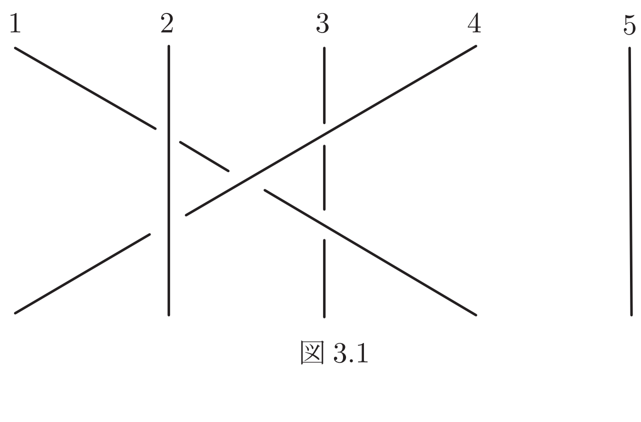
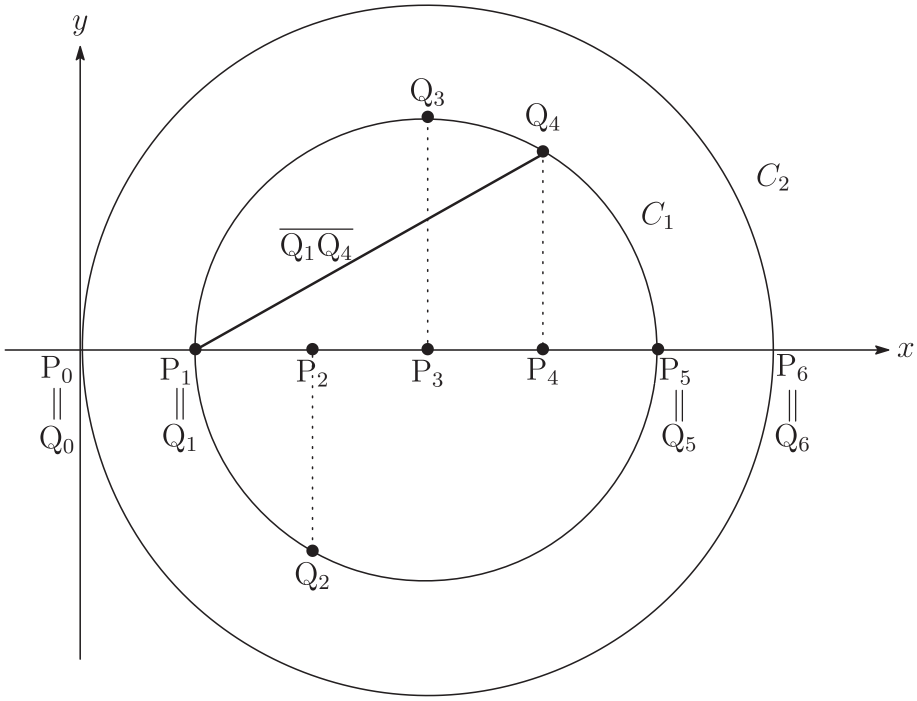
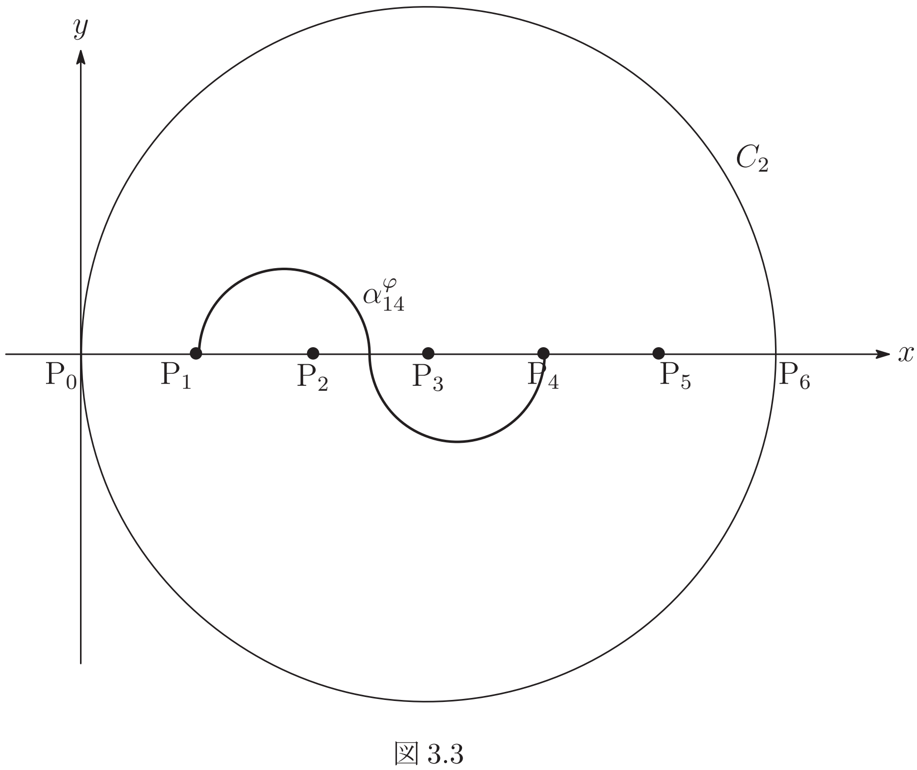


図 3.1



y
Q_3
Q_4
C_2
C_1
$\overline{Q_1Q_4}$
x
P_0 ‖ Q_0
P_1 ‖ Q_1
P_2
P_3
P_4
P_5 ‖ Q_5
P_6 ‖ Q_6
Q_2

図 3.2



y
C_2
α_{14}^{φ}
x
P_0
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6

図 3.3

注意． 前のページで,「バンド生成元に対応する線分」を定義したが，なぜこのような呼び方をするのか，その理由を説明する:

$\mathrm{P}_0=\mathrm{Q}_0=(0,0)\in\mathbb{R}^2$，$\mathrm{P}_{n+2}=\mathrm{Q}_{n+2}=(n+2,0)\in\mathbb{R}^2$ とし，C_2 を $\mathbb{R}^2$ 内の円周で，2 点 P_0，P_{n+1} を通り，線分 $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n+2}}$ を直径にもつものとする．

D を $\mathbb{R}^2$ 内の $\partial D=C_2$ なる円板とする．D のアンビエントイソトピー $\{h_u\}_{u\in[0,1]}$ で，各 $u\in[0,1]$ に対して，$h_0=\mathrm{id}$，$h_u|_{\partial D_{n+1}}=\mathrm{id}$ を満たし，各 $u\in[0,1]$ と各 $(x,y)\in\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n+1}\overline{\mathrm{Q}_i\mathrm{Q}_{i+1}}$ に対し，$h_u(x,y)=(x,(1-u)y)$ を満たすものをとる．

このとき，各 i に対して，$h_1(\mathrm{Q}_i)=\mathrm{P}_i$ となる．ここで，$1\leqq i<j\leqq n+1$ に対して，$\alpha_{ij}^{\varphi}=h_1(\overline{\mathrm{Q}_i\mathrm{Q}_j})$ と定める．このとき，$\partial\alpha_{ij}^{\mathrm{A}}=\{\mathrm{P}_i,\mathrm{P}_j\}$ であり，$k\in\mathrm{A}$ ならば α_{ij}^{φ} は P_k の上方，$k\notin\mathrm{A}$ ならば α_{ij}^{φ} は P_k の下方にくる（図 3.3 は，例 3.1 における線分 $\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_4}$ の h_1 による像 α_{14}^{φ} を表す）．

ブレイド群と穴あき円板の写像類群の間の同型写像 ([**2**]) を通して，バンド生成元 t_{ij}^{φ} は α_{ij}^{φ} と同一視が出来る（図 3.1 の t_{14}^{φ} は，図 3.3 の α_{14}^{φ} の十分小さなカラー近傍を，その外側を止めながら 180 度回転するという，$(D,\{P_1,\cdots,P_5\})$ の自己同相写像のイソトピー類に対応する）．

さらに，h_1 を通して，α_{ij}^{φ} と $\overline{\mathrm{Q}_i\mathrm{Q}_j}$ が同一視できるので，t_{ij}^{φ} と $\overline{\mathrm{Q}_i\mathrm{Q}_j}$ が同一視できる．これが，$\overline{\mathrm{Q}_i\mathrm{Q}_j}$ を t_{ij}^{φ} に対応する線分と名づけた所以である．

定義 3.2. $(\Sigma^{\mathrm{A}})^n$ の元 $(g_1,\cdots,g_n)$ が $\underline{\varphi\text{-good}}$ であるとは，$g_1,\cdots,g_n$ にそれぞれ対応する線分 $a_1,\cdots,a_n$ が次の条件 (i)-(iii) を満たすときにいう:

(i) $k\neq l$ ならば，a_k と a_l は交わらない，またはある 1 点 Q_i で交わる．

(ii) $k<l$ かつ，a_k と a_l が交わるならば，次の (I)-(VI) のいずれかが成り立っている：ここで，(i) より，$\partial a_k\cup\partial a_l$ はちょうど 3 点からなり，それらを Q_x，Q_y，Q_z $(x<y<z)$ とする．

(A1) $y\in\mathrm{A}$ かつ $a_k=\overline{\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_y}$, $a_l=\overline{\mathrm{Q}_y\mathrm{Q}_z}$
(A2) $y\in\mathrm{A}$ かつ $a_k=\overline{\mathrm{Q}_y\mathrm{Q}_z}$, $a_l=\overline{\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_z}$
(A3) $y\in\mathrm{A}$ かつ $a_k=\overline{\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_z}$, $a_l=\overline{\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_y}$
(A4) $y\notin\mathrm{A}$ かつ $a_k=\overline{\mathrm{Q}_y\mathrm{Q}_z}$, $a_l=\overline{\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_y}$
(A5) $y\notin\mathrm{A}$ かつ $a_k=\overline{\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_y}$, $a_l=\overline{\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_z}$
(A6) $y\notin\mathrm{A}$ かつ $a_k=\overline{\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_z}$, $a_l=\overline{\mathrm{Q}_y\mathrm{Q}_z}$

(iii) $a_1\cup\cdots\cup a_n$ はグラフとして樹木.

定理 2.1 は次の定理 3.3 を使って証明をしました．最後のページで，定理 2.1 の証明に少しだけ触れたいと思います．定理 3.3 の証明は省略させていただきます.

定理 3.3. $(t_{\varphi(1)},\cdots,t_{\varphi(n)})\cdot B_n=\{\varphi\text{-good}\}$.

4　定理 2.1 の証明の概略

・(実は X_n が連結のときだけを示せばよい.) まず，$X_n = \mathcal{A}_n$ の場合を考える：

$\{i_1, \cdots, i_m\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \leqq k \leqq n, \varphi^{-1}(k-1) > \varphi^{-1}(k)\}$ とし，

$$H^\varphi = \Delta_{i_m}\Delta_{i_{m-1}}\cdots\Delta_{i_1} \ (\text{但し}, \Delta_l = t_1 \cdots t_{l-1})$$

とすれば，実は $((H^\varphi)^{-1}t_1H^\varphi, \cdots, (H^\varphi)^{-1}t_nH^\varphi)$ は φ-good である.

定理 3.3 より，$((H^\varphi)^{-1}t_1H^\varphi, \cdots, (H^\varphi)^{-1}t_nH^\varphi) \in (t_{\varphi(1)}, \cdots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n$.

・$X_n = \mathcal{B}_n$ に付随する標準的生成元 $t_1, \cdots, t_n$ の間の関係式（アルチン群 $A(\mathcal{B}_n)$ の中での関係式）は，図 2.1 で与えられている．$t_1, \cdots, t_{n-1}$ は $\mathcal{A}_{n-1}$ に付随する標準的生成元と見ることが出来る．このことを利用して，$X_n = \mathcal{B}_n$ の場合を証明することができる．$X_n = \mathcal{D}_n, \cdots, \mathcal{E}_8$ の場合も同様である．　□

注意．一般に，群 G に対して，2 元 $(g_1, \cdots, g_n)$，$(g'_1, \cdots, g'_n)$ が $h \in G$ によって BC_n 同値であるならば，すなわち，

$$(h^{-1}g_1h, \cdots, h^{-1}g_nh) \in (g'_1, \cdots, g'_n) \cdot B_n$$

であるならば，$h^{-1}(g_1 \cdots g_n)h = g'_1 \cdots g'_n$ である．

従って，B_{n+1} の標準的生成元 $t_1, \cdots, t_n$ と任意の置換 $\varphi \in Sym\{1, \cdots, n\}$ に対して，H^φ を上で作った B_{n+1} の元とすると，$(H^\varphi)^{-1}(t_1 \cdots t_n)H^\varphi = t_{\varphi(1)} \cdots t_{\varphi(n)}$ が成り立つ.

参考文献

[1]A Kas, *On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration*, Pacific J. Math. **89**, 1980, 89-104.

[2]J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Mathematics Studies **82**, Princeton University Press, 1974.

[3]J. Michel, *Hurwitz action on tuples of Euclidean reflections*, J. Algebra **295**, 2006, 289-292.

[4]S. Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four, Math. Surveys and Monographs 95*, Amer. Math. Soc., 2002.

[5]S. P. Humphries, *Finite Hurwitz braid group actions on sequences of Euclidean reflections*, J. Algebra **269**, 2003, 556-588.

[6]S. P. Humphries, *Finite Hurwitz braid group actions for Artin groups*, Isr. J. Math. **143**, 2004, 189-222.

2元生成メビウス変換群における Bowditchの条件について

後藤　彩
奈良女子大学大学院　人間文化研究科　情報科学専攻

概 要

２橋結び目の双曲構造を調べる上で２元生成メビウス変換群の研究は非常に重要である。Bowditch および Tan らはこれらに対し Q 条件と呼ばれるものを定義し、その性質を調べている。ここではその Q 条件と punctured torus group や、primitive stable と呼ばれる性質との関連について計算機実験の結果を交えて報告する。

1　研究背景

1.1　メビウス変換

３次元双曲空間：$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$ 内における向きを保つ合同変換とメビウス変換と呼ばれる変換は１対１対応であることがよく知られている。

メビウス変換とは与えられた４つの値 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ が $ad - bc = 1$ を満たす時、複素数 z から以下の式への変換のことである。

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

メビウス変換全体から成る集合を M とする。M は以下と自然な対応がある

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{C} \\ ad - bc = 1 \end{array} \right\}$$

また、$a, b \in M$ と a, b の逆変換 a^{-1}, b^{-1} 及びそれらの合成変換によって生成される群を２元生成メビウス変換群という。メビウス変換に関しては文献 [5] に詳細に記述されている。

1.2　SL(2,ℂ) Character variety

２元生成自由群 F_2 から $SL(2, \mathbb{C})$ への準同型写像全体の集合について $SL(2, \mathbb{C})$ の元で互いに共役なものを同一視して得られる集合のことを character variety という。
これは以下のようにも表すことができる。

$$\begin{aligned}
&= \left\{ a \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, b \to \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \\ b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 1 \end{array} \right\} // SL(2, \mathbb{C}) \\
&= \{(Tr(f(a)), Tr(f(b)), Tr(f(ab)))\} \\
&= \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{C}\}
\end{aligned}$$

ここで、$(x, y, z) = \left(\frac{3+\sqrt{-3}}{2}, \frac{3-\sqrt{-3}}{2}, \frac{3-\sqrt{-3}}{2} \right)$ は８の字結び目の双曲構造に対応している。その他にも結び目に対応した多くの点があるが、本研究では結び目に限らず考えていく。

1.3 punctured torus group

punctured torus group とは、以下の条件を満たす 2 元生成メビウス変換群 $G=<a,b>$ のことである。

- G が離散的で自由
- $aba^{-1}b^{-1}$ が parabolic($aba^{-1}b^{-1}$ のトレース $Traba^{-1}b^{-1}=\pm 2$)

1.3.1 Farey triangulation

punctured torus group に属するメビウス変換群の条件の予想として Bowditch の Q 条件がある。
Bowditch の Q 条件は Farey triangulation を用いて考えることができる。
Farey triangulation とは以下の円の三角形分割のことである。

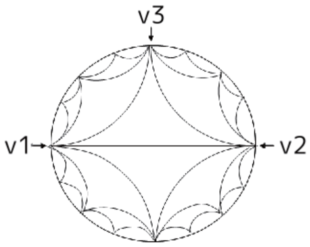
(x,y,z) において図のような円の三角形分割を考える。

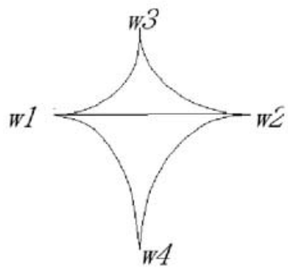
V を頂点全体の集合 としたとき、写像 $\rho: V\to\mathbb{C}$ を以下で定義する。

$$\rho(v1)=x,\rho(v2)=y,\rho(v3)=z$$

その他の頂点については次の規則で定義する。

$$\rho(w4)=\rho(w1)\rho(w2)-\rho(w3)$$





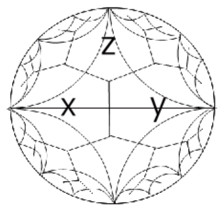


図 1: Farey triangulation

図 2: $\sum$: 双対グラフ

図２の双対グラフ $\sum$ は頂点でなく面が (x,y,z) に対応している。

1.4 Bowditch の Q 条件

(x,y,z) $\in$ SL(2,$\mathbb{C}$)character variety から定まる ρ に関する Bowditch の Q 条件とは以下の条件のことである。

定義 1 (Bowditch の Q 条件)

- 任意の頂点 $v\in V$ に対して $\rho(v)\notin[-2,2]$
- $|\rho(v)|\le 2$ となる頂点 $v\in V$ は有限個

Bowditch および Tan らは文献 [2][6] でその性質について考察をしている。
ここで、この Bowditch の Q 条件に関して以下の予想がある。

予想 (Bowditch)
(x,y,z) が punctured torus group に属することと、(x,y,z) が Bowditch の Q 条件を満たし $x^2+y^2+z^2=xyz$ であることが同値である。

Bowditch の予想が正しいのならば、punctured torus group の判別が容易になる。
そこで、本研究ではこれら２つの関係について調べていく。

2　Bowditch の Q 条件について

2.1　アルゴリズム概略

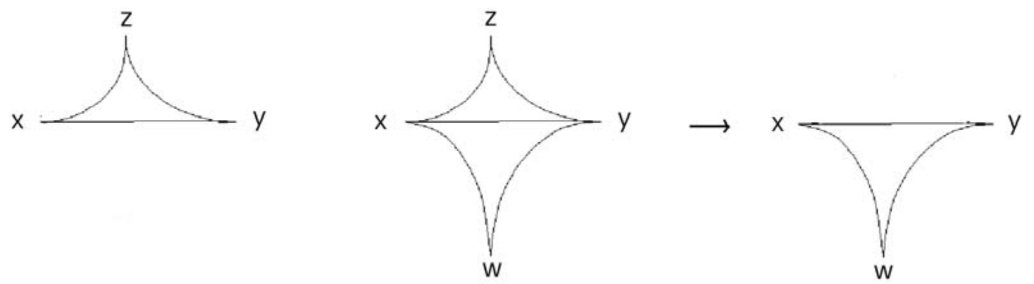
まず、punctured torus group を判別するためのアルゴリズムについて述べる。

定理 1 (Akiyoshi-Sakuma-Wada-Yamashita[1])
(x, y, z) が punctured torus group に属することと、$\sum$ 内の Jorgensen path p が存在して有限であることは同値である。

(x, y, z) が与えられたとき、Jorgensen path p を求める。

step1:sink(α, β, γ) を求める。
Farey triangulation を用いて以下の条件を満たす値 (sink) まで再帰的に計算をする。

$$(|\alpha| \le |\beta\gamma - \alpha|) \cap (|\beta| \le |\alpha\gamma - \beta|) \cap (|\gamma| \le |\alpha\beta - \gamma|)$$



step2:Jorgensen path p を求める。
step2-1 :sink(α, β, γ) から、線を伸ばして p にする。そのために以下の条件について考える。

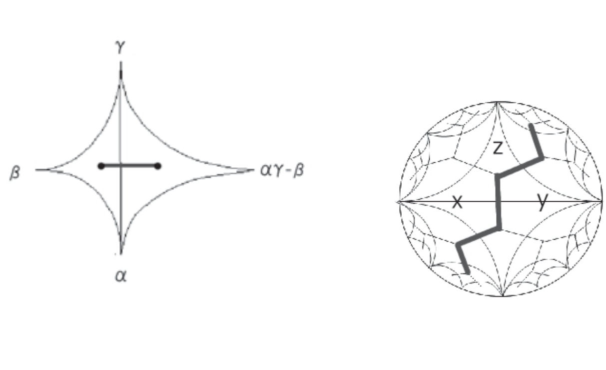
$$\begin{cases} |\gamma + \alpha i| \ge |\beta| & (1) \\ |\alpha + \beta i| \ge |\gamma| & (2) \\ |\beta + \gamma i| \ge |\alpha| & (3) \end{cases}$$

(1), (2), (3) すべてを満たすとき計算を終了する。
(1) のみ満たさない → 入力 $(\alpha, \alpha\gamma - \beta, \gamma)$ として上の式を再度計算をする。
(2) のみ満たさない → 入力 $(\alpha, \beta, \alpha\beta - \gamma)$ として上の式を再度計算をする。
(3) のみ満たさない → 入力 $(\beta\gamma - \alpha, \beta, \gamma)$ として上の式を再度計算をする。
(1), (2) を満たさない → 別途判別をし、入力 $(\alpha, \alpha\gamma - \beta, \gamma)$ または $(\alpha, \beta, \alpha\beta - \gamma)$ として再度計算をする。
(2), (3) を満たさない → 別途判別をし、入力 $(\beta\gamma - \alpha, \beta, \gamma)$ または $(\alpha, \beta, \alpha\beta - \gamma)$ として再度計算をする。
(1), (3) を満たさない → 別途判別をし、入力 $(\alpha, \alpha\gamma - \beta, \gamma)$ または $(\beta\gamma - \alpha, \beta, \gamma)$ として再度計算をする。
全て満たさない →punctured torus group でない。

step2-2:sink から、以下の条件について考える。

$$\begin{cases} |\gamma - \alpha i| \ge |\beta| & (4) \\ |\alpha - \beta i| \ge |\gamma| & (5) \\ |\beta - \gamma i| \ge |\alpha| & (6) \end{cases}$$

満たさない式がある場合は step2-1 と同様の計算を行う。
step2-1,step2-2 共に破綻しないとき、以上の計算の再帰の様子を $\sum$ 上に描くと下図のようになる。これを Jorgensen path p とする。



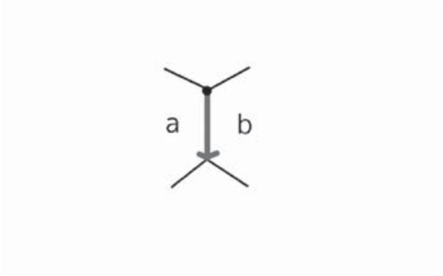
次に、Bowditch の Q 条件を判別するためのアルゴリズムについて述べる。

定理 2 (Bowditch,Tan[2][6])
(x, y, z) が *Bowditch* の Q 条件を満たすことと、$\sum$ 内の以下で定義される部分グラフ T が存在して有限であることは同値である。

(x, y, z) が与えられたとき、Bowditch の条件の T を求める。

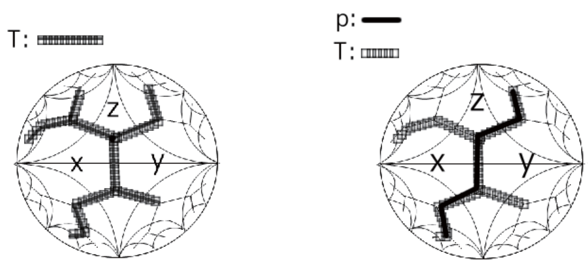
step1:sink(α, β, γ) を求める。
step2:Bowditch の条件の T を求める。
sink を出発点として、T を伸ばしていく。そのために以下の条件について考える。

$$((|a| \leq 2 + t) \cap (|b| \leq H(a) + t)) \cup ((|b| \leq 2 + t) \cap (|a| \leq H(b) + t)) \tag{1}$$



$H(a) = \sqrt{|\frac{a^2-\mu}{a^2-4}|\frac{2r^2}{r-1}}, r = \left|\frac{a+\sqrt[2]{a^2-4}}{2}\right|$
$\mu = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$
t は 0 以上の定数

以上の計算の再帰の様子を $\sum$ 上に描くと下図のようになり、これが有限であれば T となる。



2.2 Question1

計算機実験の範囲では punctured torus group に属することと Bowditch の Q 条件を満たすことは同値のようである。また、Bowditch の予想が正しければ $p \to T$,$T \to p$ となるはずなので T と p は似ているはずである。

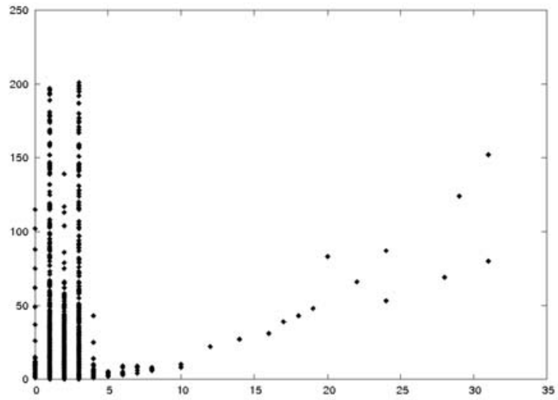
そこで 2 点間の距離を d を T の点における p までの距離の最大値、つまり
$d(T, p) = max_{v \in V(T)}\ d(v, p)$ ただし $d(v, p) = min_{v' \in V(p)}\ d(v, v')$
と定義したとき (詳細は省くが、計算機実験において $T \supset p$ という結果を得たことからこのように定義している) 以下について調べる。

Question1
Bowditch の予想が正しいとすると p と T は似ているか (2 点間の距離 d は常に小さいか)

これに関して計算機実験を行ったところ d はいくらでも大きくなる、つまり p と T は似ていないという結果になった。
それを証明するには n 回計算した後に注目している値 (x_n, y_n, z_n) について
$n \to \infty$ の時 Bowditch の条件の T の長さ $\to \infty$, かつ jorgensen path p の長さは有限であることを示す必要がある。

今回は特に $(x, y, z) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}(2 + \frac{1}{n}) + \frac{\sqrt{4n^2-4n-1}}{n}i, 2 + \frac{1}{n})$ (ただし $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = x_n y_n z_n$)
について数学的に証明したが、詳細は省く。

計算機実験の結果

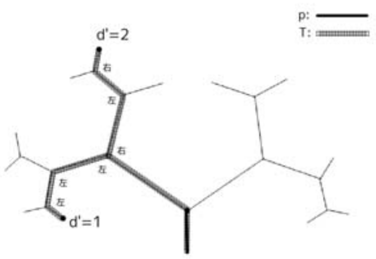


横軸が Jorgensen path p の長さ、縦軸は d の長さ

主定理 (G-Y)
d はいくらでも大きくなる

2.3 Question2

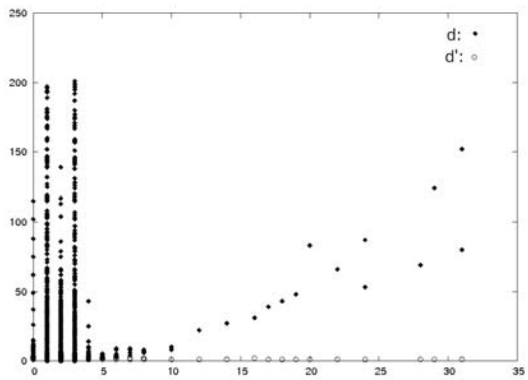
d はいくらでも大きくなるという結果を得たが、その結果にはまだ疑問が残るため、d を再定義し計算をしなおすことにした。そこで、d を T の点における p までの最大の方向転換した回数として d' とおく。



例えば同じ方向 (左図では左) に曲がり続けるならば $d' = 1$ である。
このような場所では d がいくらでも大きくなる。

Question2
T と p は全く似ていないのか

計算機実験の結果



横軸が Jorgensen path p の長さ、縦軸は d または d' の長さ

$$\begin{cases} (x,y,z)\,\big|\,x^2+y^2+z^2=xyz \\ -100 \le x \le 100 \\ -100 \le y \le 100 \end{cases}$$

計算機実験の結果によれば、T と p の間の距離を定義しなおしたことで d' はある一定の大きさに収まるようになった。ただし式 (1) 中の t を変化させると T と p の間の距離も変化するのでその点には注意する必要がある。

計算機実験による観察 (G)
d' は有限

3 BowditchのQ条件とprimitive stableについて

3.1 primitive stable

まず必要な言葉を定義しておく。

$F_2 =< a, b >$2 元生成自由群
$\tilde{\Gamma}$ =word tree = $< a, b >$Cayley graph

$\beta = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ からなる両側無限既約文字列
既約文字列とは文字列中に打ち消されるもの (aa^{-1}, bb^{-1} など) を含まない文字列のことである。
ω を a cyclically reduced word とする。
a cyclically reduced word:文字列中に打ち消されるものがないだけでなく先頭、末尾が $a \cdots a^{-1}$ などのようにならない文字列のことである。
$\bar{\omega}$ とは ω を無限に繰りかえしたもので β に属する。
$\omega \in F_2$ が primitive word$\Leftrightarrow \exists g \in F_2, \omega$ と g が F_2 を生成
$p = \{\bar{\omega}|\omega$ は Primitive word$\} \subset \beta$
$x \in \mathbb{H}^3$ を 1 つ固定し、$\rho : F_2 \to SL(2, \mathbb{C})$ を定めたとき $\tau_{\rho,x} : \tilde{\Gamma} \to \mathbb{H}^3$: を定義することができる。

$\rho : F_2 \to SL(2, \mathbb{C})$ が primitive stable であるとは以下の条件を満たすときを言う。

定義 2 (primitive stable[4])
定数 $\exists k, \delta$ と $x \in \mathbb{H}^3$ が存在し $\tau_{\rho,x}$ が p の要素を常に $(k, \delta) - quasi - geodesic$ に移す時
すなわち $\forall \bar{\omega} \in p$ に対し、*1*〜m 番目までの文字列を $\bar{\omega}(m) \in F_2$ と書くと
$\Leftrightarrow \forall m, n$ に対し
$-\delta + \frac{1}{k} d(m, n) < d_{\mathbb{H}^3}(\tau_{\rho,x}(\bar{\omega}(m)), \tau_{\rho,x}(\bar{\omega}(n))) < kd(m, n) + \delta$

上式は $d_{\mathbb{H}^3}$ が d の数倍程度の大きさにおさまる、つまり $d_{\mathbb{H}^3}$ と d に関するグラフを作成した場合描画される点はある適当な範囲におさまる、という意味である。

$d(m, n)$ は 2 点 m, n 間の距離 ($|m - n|$)、$\tau_{\rho,x}(\bar{\omega}(m))$ は$\bar{\omega}(m)$ を $\mathbb{H}^3$ に移動した点である。

3.2 研究目的

Yair N. Minsky は [4] において $PS(F_2) \subset BQ$ と予想している。そこで、Bowditch の Q 条件と primitive stable の関連性を調べることにした。
そのために Bowditch の Q 条件を満たす領域、満たさない領域で $d(m, n)$ と $d_{\mathbb{H}^3}(\tau_{\rho,x}((\bar{\omega}(m)), \tau_{\rho,x}(\bar{\omega}(n)))$ について描画しその様子を観察する。

ただし、すべての文字列について計算をすることは不可能なのでいくつかの primitive word をつくりだし (その際に文献 [3] にある方法を使用した)、その primitive word において計算をし、表示をしている。

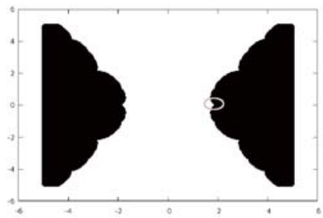
3.3 研究結果

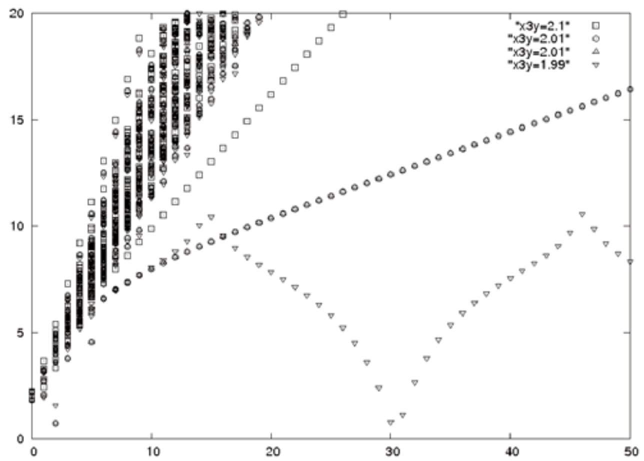
いくつかのパラメータについて計算した結果を以下に示す。

左図は Bowditch の Q 条件に関するグラフで、黒い部分が Bowditch の Q 条件を満たす領域である。
右図は primitive stable に関するグラフで、横軸が d, 縦軸が $d_{\mathbb{H}^3}$ の大きさである。

$(x, y, z) = (3, y, z|x^2 + y^2 + z^2 = xyz)$ の場合

y の値を Bowditch の Q 条件を満たす領域から満たさない領域に向けて動かしている。
y が Bowditch の Q 条件を満たす領域にある時はグラフは primitive stable であるといえる形をとっているが、Bowditch の Q 条件を満たさない領域にある時はグラフの傾きが 0 の場所があるため、primitive stable であるとは言えない形になっている。

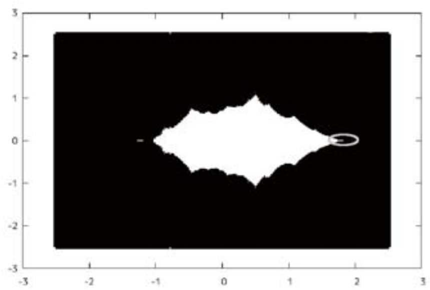


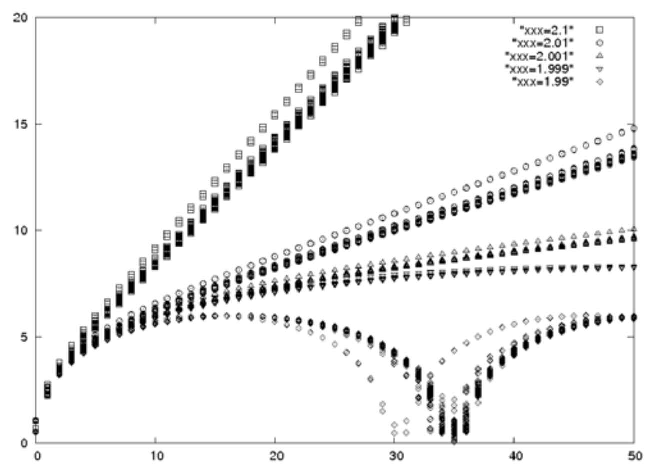


このグラフからは、Bowditch の Q 条件を満たすことと primitive stable であることは同じであることが見て取れる。

$(x, y, z) = (x, x, x)$ の場合

このパラメータは $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ を常に満たすわけではないが、グラフの様子は前と同様であり、y が Bowditch の Q 条件を満たす領域にある時はグラフは primitive stable であるといえる形だが、Bowditch の Q 条件を満たさない領域にある時は primitive stable であるとは言えない形になっている。



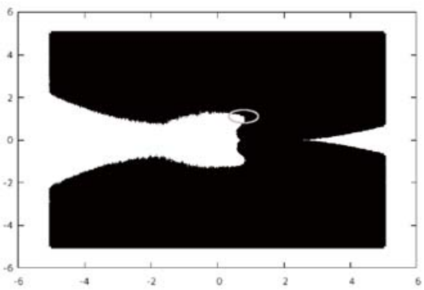
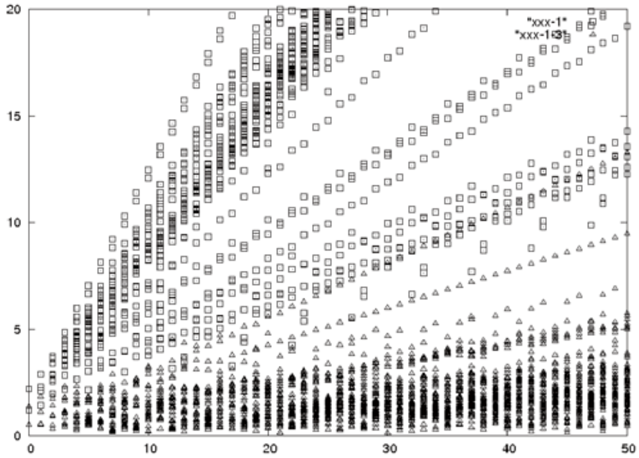


$(x, y, z) = (x, \frac{x}{x-1}, \frac{x}{x-1})$ の場合

このパラメータは $x = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ としたとき 8 の字結び目の双曲構造を表すものとなる。

前の 2 つのグラフとは一見様子が違うように見える。しかし今回の計算機実験では全ての primitive word について計算をしているわけではないのでたまたま前の 2 つのグラフと同じような形となるものがでてこなかっただけである。

つまり、Bowditch の Q 条件を満たす値ならばグラフは primitive stable でると言える形をとり、満たさない値ならばグラフは傾きが 0 になる場所があるので primitive stable とは言えないという形をとっている、という全体の様子は前の 2 つのグラフと変わらない。

以上の計算機実験の結果から、Bowditch の Q 条件を満たすことと primitive stable であることは同じではないかとと考えられる。

4　まとめ

Question1(Bowditch の条件の T と Jorgensen path p は似ているか)
T と p の間の距離 d はいくらでも大きくなることを数学的に証明した。
→ 似ていない。

Question2(Bowditch の条件の T と Jorgensen path p は本当に似ていないか)
d を再定義し、d' として計算をした結果、d' が有限となった。
→ 距離の定義によっては似ていると言える。

Primitive stable と Bowditch の Q 条件との関連性
→ いくつかの計算結果においては Primitive stable であれば Bowditch の Q 条件を満たすように見えた。

参考文献

[1] Hirotaka Akiyoshi, Makoto Sakuma, Masaaki Wada, Yasushi Yamashita
Punctured torus groups and 2-bridge knot groups. I,
Lecture Notes in Mathematics, 1909. Springer, Berlin, 2007. xliv+252 pp.

[2] Brian H. Bowditch
Markoff triples and quasi-Fuchsian groups,
Proc. London Math. Soc. (3) 77 (1998), no. 3, 697–736.

[3] Jane Gilman, Linda Keen,
Enumerating Palindromes and Primitives in Rank Two Free Groups,
arXiv:0802.2731v4 [math.GR]

[4] Yair N. Minsky,
On dynamics of Out(F_n) on PSL($2,\mathbb{C}$) characters,
arXiv:0906.3491v1 [math.GT]

[5] David Mumford, Caroline Series, David Wright,
Indra's pearls. The vision of Felix Klein.,
Cambridge University Press, New York, 2002. xx+396 pp.

[6] Ser Peow Tan, Yan Loi Wong, Ying Zhang,
Generalized Markoff maps and McShane's identity,
Adv. Math. 217 (2008), no. 2, 761–813.

A homological representation of the Braid groups and the Alexander polynomials

川越　謙一
金沢大学

1 Introduction.

Lawrence constructed the braid group(in fact, Hecke algebra) representaions on the homology of the configuration spaces H_m^{lf}, which is called homological representations. Krammer showed that the braid group is linear using those representaions. After that, Bigelow and Mimachi defined the Jones polynomials using those representaions.

In this talk, we define the Alexander polynomials from the homological representaions.

2 Preliminary.

Let $t, z, \lambda \in \mathbb{C}$ where $t \neq z$. $(t-z)^\lambda$ is defined by

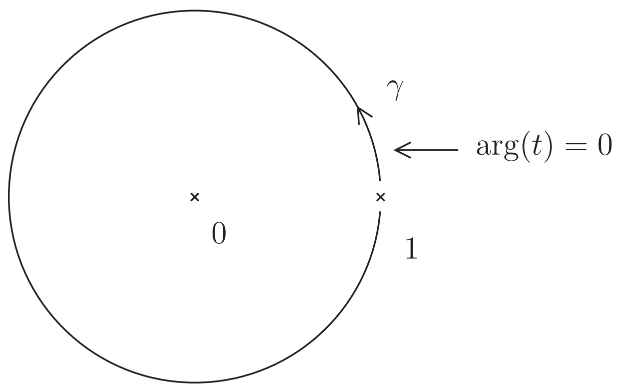
$$\begin{aligned}(t-z)^\lambda &= \mathrm{e}^{\lambda \log(t-z)} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda(\log|t-z|+\arg(t-z))}.\end{aligned}$$

log is usually explaind as a multivalued function because arg is determined $\mod 2\pi$.

However, we fix arg of $t-z$ first, and we consider log with a path γ, then log turns to be an ordinary one-valued function.

Example.

Set $z=0, \lambda \notin \mathbb{Q}$ and γ to be a circle with a radius 1. Choose $\arg(t)=0$ at 1.



At $t=1$, we have

$$\begin{aligned}t^\lambda &= \mathrm{e}^{\lambda(\log|t|+\sqrt{-1}\arg(t))} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda(0+\sqrt{-1}\times 0)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

On the other hand, after t moves along γ, we obtain

$$
\begin{aligned}
t^{\lambda} &= \mathrm{e}^{\lambda(\log|t|+\sqrt{-1}\arg(t))} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda(0+\sqrt{-1}\times 2\pi)} \\
&= \mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}\cdot 1
\end{aligned}
$$

3 Twisted homology groups.

We fix real numbers $z=(z_1,z_2,\ldots,z_{2m})\in\mathbb{C}^{2m}$ such that

$$0<z_1<z_2<\ldots<z_{2m}<+\infty.$$

Let $t=(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ be a set of mutually distinct elements in $\mathbb{C}^m$. We define $\mathcal{L}$ to be a local system on

$$\mathcal{T}=\mathbb{C}^m\setminus\bigcup_{1\le i<j\le m}\{t_i-t_j=0\}\cup\bigcup_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le 2m}}\{t_i-z_j=0\}$$

determined by

$$u(t)=\prod_{1\le i<j\le m}(t_i-t_j)^{g}\prod_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le 2m}}(t_i-z_j)^{-\frac{g}{2}},$$

where $\frac{g}{2}\in\mathbb{R},\quad \frac{g}{2}\notin\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2,\ldots,\mathbb{Z}/2m.$

Elements of $H_m^{lf}(\mathcal{T},\mathcal{L})$ have the following expression

$$\sum_{\triangle:m\text{-simplex}}a_{\triangle}\triangle\otimes u_{\triangle}(t).$$

A boundary operator ∂ is a $\mathbb{C}$-linear mapping satisfying

$$\partial(\triangle\otimes u_{\triangle})=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\triangle^i\otimes u_{\triangle}|_{\triangle^i}$$

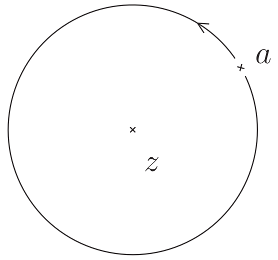
where $\triangle^i$ is the i-th face of $\triangle$ and $u_{\triangle}|_{\triangle^i}$ is the restriction on $\triangle^i$.

Example(m=1).

Set $u(t)=t^{-\frac{g}{2}}(1-t)^{-\frac{g}{2}}$ and $\mathrm{e}(\lambda)=\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}$. We give some examples of $H_1^{lf}(\mathcal{T},\mathcal{L})$ and $H_1(\mathcal{T},\mathcal{L})$.

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \overrightarrow{(0,1)}\otimes u(t) \qquad \in H_1^{lf}(\mathcal{T},\mathcal{L}) \\
&= \underset{0}{\times}\longrightarrow\underset{1}{\times}\otimes u(t)
\end{aligned}
$$

Let $S(z;a)$ be an oriented circle enterd at z with starting and ending point a.

$S(z;a) \quad =$ 

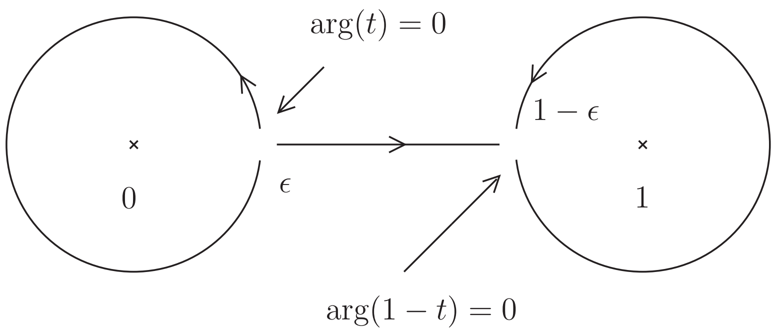
The following example is a cycle with compact support:

$$C_2 = \Big(\frac{1}{e(-\frac{g}{2})-1}S(0;\varepsilon) + \overrightarrow{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} - \frac{1}{e(-\frac{g}{2})-1}S(1;1-\varepsilon)\Big) \otimes u(t)$$
$$\in H_1(\mathcal{T},\mathcal{L})$$

because

$$\partial(S(0;\varepsilon)\otimes u(t)) = (\varepsilon)\otimes \underset{\arg(t)=2\pi}{u(t)} \quad - \quad (\varepsilon)\otimes \underset{\arg(t)=0}{u(t)}$$
$$= (e(-\frac{g}{2})-1)(\varepsilon)\otimes \underset{\arg(t)=0}{u(t)}$$

This cycle is pictured by

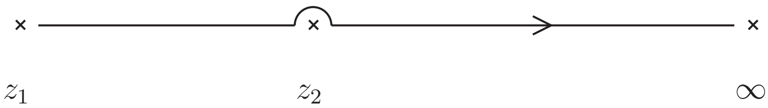


There is a linear map reg : $H_m^{lf}(\mathcal{T},\mathcal{L}) \to H_m(\mathcal{T},\mathcal{L})$, called a *regularization*. For example, $C_2 = \mathrm{reg}\, C_1$.

For $m = 1$, we describe a subspace of the twisted homology group, $V_1 \subset H_1^{lf}(\mathcal{T},\mathcal{L})$, which is defined to be generated by two elements γ_1 and γ_2: $V_1 = \sum_{j=1}^{2} \mathbb{C}\gamma_j(t;z)$.

γ_1, γ_2 is defined by

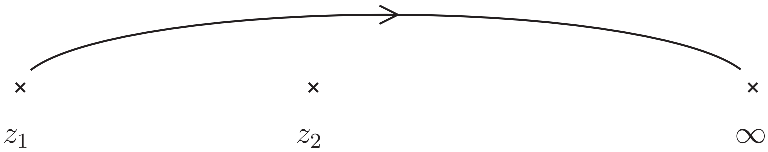
$\gamma_1 \quad =$



$\otimes \ (t-z_1)^{-\frac{g}{2}}(t-z_2)^{-\frac{g}{2}}$

$\arg(t-z_j)=0$ for $t>z_2$

$=$



$\otimes \ (t-z_1)^{-\frac{g}{2}}(t-z_2)^{-\frac{g}{2}}$

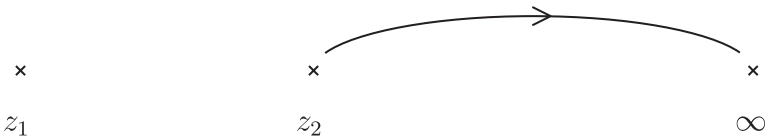
$\arg(t-z_j)=0$ for $t>z_2$

$\sim$

$\otimes \ (t-z_1)^{-\frac{g}{2}}(t-z_2)^{-\frac{g}{2}},$

$\arg(t-z_j)=0$ for $t>z_2$

$\gamma_2 \quad =$



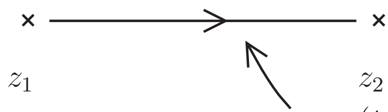
$\otimes \ (t-z_1)^{-\frac{g}{2}}(t-z_2)^{-\frac{g}{2}},$

$\arg(t-z_j)=0$ for $t>z_2$

where $\sim$ means homologous.

There is a relation $\gamma_1 + q^{-1}\gamma_2 \sim 0 \quad (q = \mathrm{e}^{\pi\sqrt{-1}g})$. Hence $\dim V_1 = 1$ and its generatar is

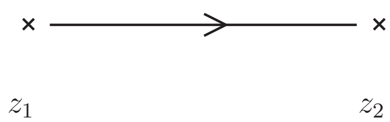
$\gamma_1 - \gamma_2 \quad =$



$\otimes \ (t-z_1)^{-\frac{g}{2}}(t-z_2)^{-\frac{g}{2}}$

$\arg(t-z_1)=0$
$\arg(t-z_2)=\pi$

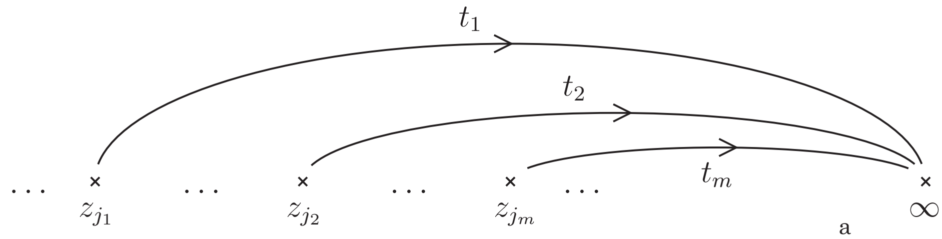
$= \quad q^{-\frac{1}{2}}$



$\otimes \ (t-z_1)^{-\frac{g}{2}}(z_2-t)^{-\frac{g}{2}},$

For a general $m>1$, $\gamma_{j_1 j_2 \cdots j_m}(t;z)$ is defined by

$\gamma_{j_1 j_2 \cdots j_m}(t;z) =$



$\otimes \, u(t).$

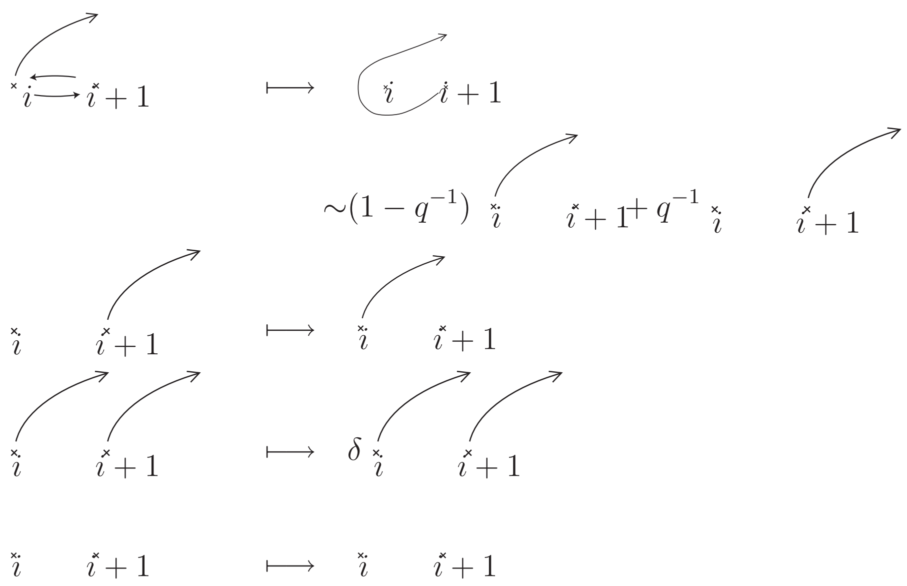
where $\arg(t_{\sigma(i)} - t_{\sigma(j)}) = 0$ for $t_{\sigma(i)} > t_{\sigma(j)}$ and $\arg(t_{\sigma(i)} - z_{\sigma(j)}) = 0$ for $t_{\sigma(i)} > z_{2m}$.

Let $\widetilde{\gamma}_{j_1 j_2 \cdots j_m}(z)$ be a symmetrization of $\gamma_{j_1 j_2 \cdots j_m}(t; z)$:

$$\widetilde{\gamma}_{j_1 j_2 \cdots j_m}(z) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \gamma_{j_1 j_2 \cdots j_m}(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(m)}; z)$$

Let V_m be a subspace of $H_m^{lf}(\mathcal{T}, \mathcal{L})^{\mathfrak{S}_m}$ spanned by $\widetilde{\gamma}_{j_1 j_2 \cdots j_m}(z)$.

There are two representations of the braid group B_{2m} on $H_m^{lf}(\mathcal{T}, \mathcal{L})^{\mathfrak{S}_m}$. One is ρ_V, which corresponds to the Jones polynomial by Bigelow and Mimachi, and the other is ρ_A. The action of σ_i is defined by twisting i-th and $i+1$-th points counterclockwise:



where $s = 1$ if the representation is ρ_V, and $\delta = -q^{-1}$ if the representation is ρ_A

4 Intersection number.

Two intersetion forms

$$\langle , \rangle_J,\ \langle , \rangle_A\ :\ H_m^{lf}(\mathcal{T}, \mathcal{L}) \times H_m^{lf}(\mathcal{T}, \mathcal{L}) \to \mathbb{C}$$

are defined by

$$\langle C, C' \rangle_J = \sum_{\rho,\sigma} a_\rho \overline{a'_\sigma} \sum_{t \in \rho \cap \sigma} I_t(\rho, \sigma) v_\rho(t) \overline{v'_\sigma(t)} / |u|^2$$

$$\langle C, C' \rangle_A = \sum_{\rho,\sigma} a_\rho \overline{a'_\sigma} \sum_{t \in \rho \cap \sigma, t \neq t_1} I_t(\rho, \sigma)$$

for $C, C' \in H_m^{lf}(\mathcal{T}, \mathcal{L})$, if reg C and C' are represented by

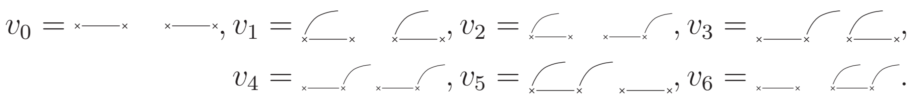
$$\text{reg } C = \sum_\rho a_\rho \rho \otimes v_\rho(t), C' = \sum_\sigma a'_\sigma \sigma \otimes v'_\sigma(t)$$

and I_t is the topological intersection number of C, C' at t.

5 Example(Trefoil knot, as plat closure of $\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$).

Here we describe how we calculate the Jones polynomial and the Alexander polynomial except normalizations.

We define $v_i \in H_2^{lf}(\mathcal{T},\mathcal{L})$ $(i=0,\dots,6)$ by



v_0 have a following expression: $v_0 = q(v_1 - v_2 - v_3 + v_4)$. We calculate an action of $b = \sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$ on v_0:

$$\begin{aligned}\rho(b)v_0 &= \{q^2\delta - q(1-q)\delta^{-1} - (1-q)^3\}v_1 + (1-q)v_2 + (1-q)\delta^{-1}v_3 + q^2 v_4 \\ &\quad - \{q\delta^{-1} + (1-q)^2\}qv_5 + \{-1 + q(1-q)\}v_6\end{aligned}$$

where $\delta = 1$ if $\rho = \rho_J$, or $\delta = -q^{-1}$ if $\rho = \rho_A$. We have intersection numbers $\langle v_0, v_1\rangle_J = q^3$, $\langle v_0, v_2\rangle_J = \langle v_0, v_3\rangle_J = -q^2$, $\langle v_0, v_4\rangle_J = q$, $\langle v_0, v_i\rangle_J = 0$ $(i = 5, 6)$ and $\langle v_0, v_1\rangle_A = \langle v_0, v_3\rangle_A = -1$, $\langle v_0, v_2\rangle_A = \langle v_0, v_4\rangle_A = 1$, $\langle v_0, v_i\rangle_A = 0$ $(i = 5, 6)$

Case of $\langle v_0, b\cdot v_0\rangle_J$:

$$\begin{aligned}&\{q^{-2} - q^{-1}(1-q^{-1}) - (1-q^{-1})^3\}\cdot q^3 - 2(1-q^{-1})\cdot q^2 + q^{-2}\cdot q \\ &= q^{-1}(1+q)\boxed{(1+q^2-q^3)}\end{aligned}$$

$1 + q^2 - q^3$ is the Jones polynomial of the trefoil knot.

Case of $\langle v_0, b\cdot v_0\rangle_A$:

$$\begin{aligned}&\{q^{-2}\delta^{-1} - q^{-1}(1-q^{-1})\delta - (1-q^{-1})^3\}v_1 + (1-q^{-1})v_2 + (1-q^{-1})\delta v_3 + q^{-2}v_4 \\ &= (-1 + 2q^{-1} - 2q^{-2})v_1 + (-q^{-1} + q^{-2})v_3 + (1-q^{-1})v_2 + q^{-2}v_4\end{aligned}$$

the sum of coefficients of first and second terms is $1 - q^{-1} + q^{-2}$ and the sum of coefficients of third and fourth terms is $1 - q^{-1} + q^{-2}$, which is the Alexander polynomial of the trefoil knot.

An estimation of Heegaard distance by using Reeb graph

井戸 絢子*

奈良女子大学大学院 人間文化研究科 数学専攻

1 Introduction

Hempel によって導入された Heegaard splitting の *distance* の概念は，3 次元多様体を調べる上で有効であることが多くの研究者によって示されている．例えば，Scharlemann-Tomova は次のことを示している．

定理 1.1 (Corollary 4.5 of [ST]) M の Heegaard splitting $A \cup_P B$ に対して，その distance $d(P)$ が $d(P) > 2g(P)$ を満たすならば次が成り立つ．

- P は M の minimal genus Heegaard surface である．
- 任意の minimal genus Heegaard surface は P に isotopic である．

加えて, M の Heegaard splitting $X \cup_Q Y$ に対して，$d(P) > 2g(Q)$ が成り立つならば，Q は P もしくは P の stabilization に isotopic である．

この定理の証明には Rubinstein-Scharlemann[RS] によって導入された概念である *(Rubinstein-Scharlemann) graphic* が使われている．Graphic は Kobayashi-Saeki[KS] により，もとの多様体 M から $[0,1] \times [0,1]$ への安定写像の discriminant set の像と解釈できることが示されており，彼らはこの考えを利用し安定種数の評価を graphic 上の arc の変形で観察できるような例があることを示している (Corollary 5.7 of [KS])．このアプローチを J.Johnson[J1] は, より一般的な設定で定式化し，さらに発展させることで高い distance をもつ Heegaard splitting の flipping に必要な *stabilization* の数の決定 [J2](もともとは [HTT] によって示されたされた結果である）に成功している．この証明における主要なツールは graphic が含まれている値域 $[0,1] \times [0,1]$ 内の "*mostly above region*", "*mostly below region*" (定義については第 4 節参照) と交わらない horizontal arc である．Johnson はこの horizontal arc を利用して，考えている Heegaard splitting の distance の評価を与えているが，これは定理 1.1 の別証明にもなっている．

本稿では，このような horizontal arc のより精密な取扱いを導入し，それを用いて Johnson が与えた distance の評価が改良できることを報告する．具体的には，M の 2 つの strongly irreducible な Heegaard splitting が与えられた時（そこから構成される graphic に対してとれる，ある良い性質を持った horizontal arc から）*Reeb graph* と呼ばれる 1-complex を構成し，その subgraph G_e^* を考える．さらに G_e^* の各 edge に positive integer を assign する方法を導入する．このとき次の結果が成り立つ．

定理 1.2 $d(P) \leq \min\{G_e^*$ の右端に位置する edge に assign された番号 $\}+1$

* eaa.ido@cc.nara-wu.ac.jp

2 Heegaard splitting

以下 $A \cup_P B$ を closed, orientable 3-manifold M の Heegaard splitting とする.

定義 2.1

- $A \cup_P B$ が *reducible*$\Leftrightarrow$
  A に含まれる meridian disk D_A と B に含まれる meridian disk D_B で $\partial D_A = \partial D_B$ となるものが存在する.
- $A \cup_P B$ が *weakly reducible*$\Leftrightarrow$
  A に含まれる meridian disk D_A と B に含まれる meridian disk D_B で $\partial D_A \cap \partial D_B = \phi$ となるものが存在する.
- $A \cup_P B$ が weakly reducible でないとき，*strongly irreducible* という.

Heegaard surface P に parallel な arc をとって，それに沿って tube をつけるという操作を行って得られる surface は，また M の Heegaard surface になっていることが容易に分かる.

定義 2.2 (Stabilization) P に対して上の操作を有限回行って得られる新しい Heegaard splitting を $A \cup_P B$ の *stabilization* という.

定義 2.3 $A \cup_P B$ は M の reducible でない Heegaard splitting で $g(P) \geq 2$ とする．この Heegaard splitting の distance $d(P)$ を次のような自然数 k の最小値で定義する.

P 上の essential simple closed curves の列 $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$ と handlebody A の meridian disk D_A, B の meridian disk D_B で次を満たすものがある.

- $\gamma_0 = \partial D_A$, $\gamma_k = \partial D_B$
- $\gamma_{i-1} \cap \gamma_i = \phi$ $(i = 1, \ldots, k)$

3 Rubinstein-Scharlemann graphic

Sweep-out and graphic

M の Heegaard splittings $A \cup_P B$, $X \cup_Q Y$ に対して，Σ_A, Σ_B, Σ_X, Σ_Y を A, B, X, Y の spine とする．このとき，M における $\Sigma_A \cup \Sigma_B$ の補空間は $P \times (0,1)$ に同相であるから,

$$M = \Sigma_A \cup P \times (0,1) \cup \Sigma_B$$

と分解することができる．このことから, 次を満たす smooth map $f : M \to [0,1]$ が存在することが分かる．この f を P の *sweep-out* という.

・各 $s \in (0,1)$ に対して，$f^{-1}(s)$ は P に isotopic.

・$f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ はそれぞれ Σ_A, Σ_B に isotopic.

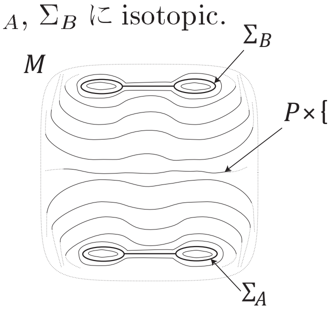


図 1

Q の sweep-out g も同様に定義できる.

この時，2 つの sweep-outs f, g の積 $f \times g : M \to [0,1] \times [0,1]$ を考える．必要ならば f と g を少し動かしてやることにより，$f \times g$ は安定写像と呼ばれる写像になっているとしてよい (Theorem 4.2 of [KS])．このことから次のことがわかる．

今，$s, t \in [0,1]$ に対して

- $P_s = f^{-1}(s)$ $(s \in (0,1))$，$P_0 = \Sigma_A$，$P_1 = \Sigma_B$
- $Q_t = g^{-1}(t)$ $(t \in (0,1))$，$Q_0 = \Sigma_X$，$Q_1 = \Sigma_Y$

とおく．このとき，P_s と Q_t が tangent point をもつような点を集めてやると，次のような $[0,1] \times [0,1]$ 内の 1-complex になっている．

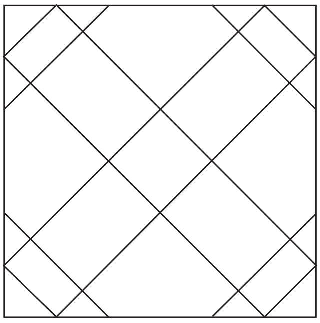


図 2

この 1-complex Γ を *Rubinstein-Scharlemann graphic* という．$(0,1) \times (0,1)$ は，次の 4 つの parts で構成されている．

Edges : P_s と Q_t が center 型または suddle 型で 1 点で接している．

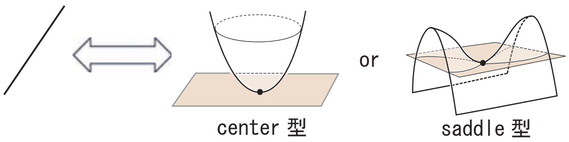


図 3

Crossing points : 4 価の vertex．ここでは P_s と Q_t が 2 点で接している．

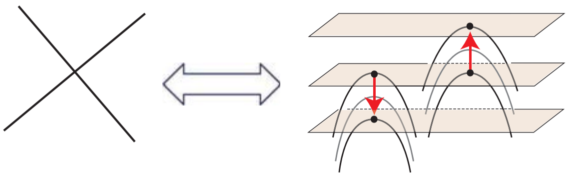


図 4

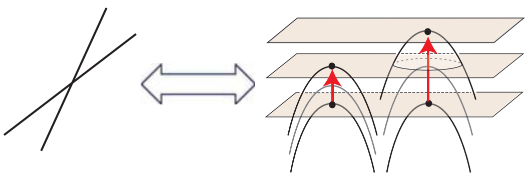


図 5

Birth-death : 2 価の vertex．この vertex の近傍では何もないところから suddle 型の tangent point と center 型の tangent point ができる．またはその逆．

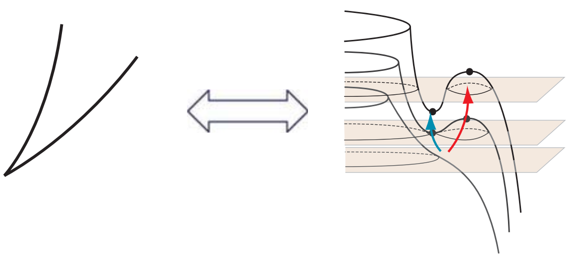


図 6

Regions : $(0,1) \times (0,1)$ 内における Γ の補空間．ここでは P_s と Q_t が transverse に交わっている．

Labelling regions

上で定めた region について考える．今 (s,t) と (s',t') は同じ region に含まれているとする．このとき $P_s\cap Q_t$ と $P_{s'}\cap Q_{t'}$ の P，Q 上の配置は isotopic になっていることに注意する．また (s,t) は region 内の点であることから，P_s と Q_t は transverse に交わり，その交わりは P_s 上，Q_t 上の simple closed curves からなる．この simple closed curves の union を C とかくことにする．

定義 3.1 C の成分のうち P_s(resp. Q_t) 上 essential なもの全体からなる集合を C_P(resp. C_Q) とかくことにする．また C_P の部分集合 C_A を次のように定める．

$$C_A = \{c \mid \exists D \subset Q_t - C_P \text{ s.t. } \partial D = c \text{ かつ } N(\partial D, D) \subset A\},$$

但しここで $N(\partial D, D)$ は ∂D の D における正則近傍とする．

$C_B \subset C_P$, $C_X, C_Y \subset C_Q$ も同様に定める．

次に，各 region に以下のようにして label をつける．

• いま C_P と C_Q は空とする．このとき Q_t 上の (P_s と disjoint な) essential simple closed curves はすべて A か B に含まれることがわかる．これらの curves がすべて A (resp. B) に含まれるとき，その region を b (resp. a) と label 付けする．同様に，P_s 上の (Q_t と disjoint な)essential simple closed curves が，すべて X (resp. Y) に含まれるとき，その region を y (resp. x) と label 付けする．

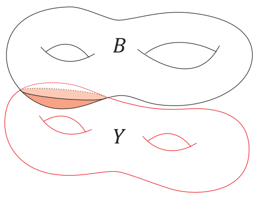


図 7　label b, y が付く配置

• いま C_A が空でないとき，その region を A (resp. B, X, Y) と label 付けする．

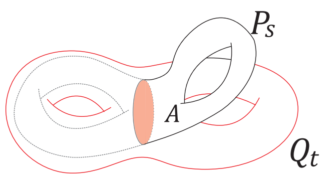


図 8　label A が付く配置

Remark この label 付けの定義から次のことがわかる．

• いま (s,t) を label のついていない region 内の点とする．このとき $C_P = C_Q \neq \phi$ である．すなわち $P_s\cap Q_t$ の各交わりは，P_s, Q_t 上でともに essential か，ともに inessential である．特に P_s, Q_t 上でともに essential は必ずある．

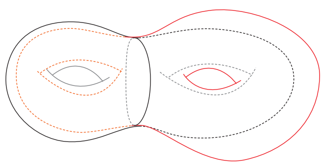


図 9　label が付かない配置

• $[0,1]\times[0,1]$ 内の左下の頂点の近傍の region には label(a,x) が付いている．
同様に左上（resp. 右下，右上）頂点の近傍の region には label(a,y) (resp. (b,x), (b,y)) が付いている．

• $[0,1]\times[0,1]$ 内の左の辺の近傍の region には label a または A が付いている．
同様に右（resp. 下，上）の辺の近傍の region には label b または B (resp. x または X, y または Y) が付いている．

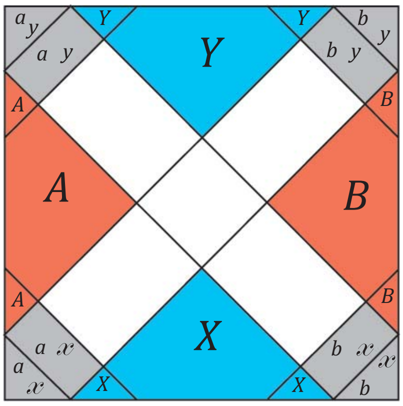


図 10

命題 3.2 (Proposition 5.9 of [RS]) $A\cup_P B$ と $X\cup_Q Y$ がともに strongly irreducible と仮定する．このとき P,Q から得られる graphic の定める region で，label の付かないものが必ず存在する．

4 Johnson's argument

$A\cup_P B$, $X\cup_Q Y$，P_s, Q_t を前節の通りとする．

定義 4.1 $P_s\cap X$ のすべての component が P_s の disk subset に含まれるとき，P_s is *mostly above* Q_t とよぶ．また，$P_s\cap Y$ のすべての component が P_s の disk subset に含まれるとき，P_s is *mostly below* Q_t とよぶ．

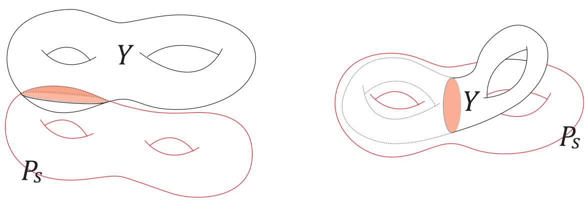


図 11　P_s is mostly below Q_t となる配置

labelling regions (after Johnson)

• 各 region 内の点 (s,t) に対応する P_s と Q_t が P_s is mostly above Q_t ならば，そのような region を *mostly above region* とよぶ．その union の閉包を R_a とかく．

• 各 region 内の点 (s,t) に対応する P_s と Q_t が P_s is mostly below Q_t ならば，そのような region を *mostly below region* とよぶ．その union の閉包を R_b とかく．

Remark この label 付けの定義から次のことがわかる．

- $[0,1]\times[0,1]$ 内の上（resp. 下）の辺の近傍の region は R_a (resp. R_b) に含まれている．

補題 4.2 (Lemma 14 of [J2]) Q が P にも，P の stabilization にも isotopic でないならば，$[0,1]\times[0,1]$ 内に R_a とも R_b とも disjoint な horizontal arc $[0,1]\times\{t\}$ が必ず存在する．

次の補題は [J2] の中で述べられている．

補題 4.3 補題 4.2 で得られた horizontal arc $[0,1]\times\{t\}$ の subarc $[s_0,s_1]\times\{t\}$ で以下を満たすものがある．

- (s_0,t) と (s_1,t) は graphic の edge 上の点である．
- 任意の $s\in(s_0,s_1)$ に対して，(s,t) は unlabelled regions 内の点であり，十分小さい $\epsilon>0$ に対して，$(s_0-\epsilon,t)$ は label A のついた region 内の点，$(s_1+\epsilon,t)$ は label B のついた region 内の点である．

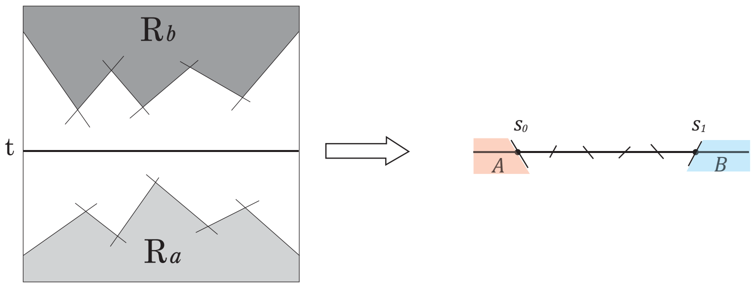


図 12

5 Heegaard distance の評価

$A\cup_P B$, $X\cup_Q Y$，P_s, Q_t, f を前の通りとする．

$[0,1]\times[0,1]$ 内の horizontal arc $[0,1]\times\{t\}$ に対応する surface は第 3 節で定義した Q_t となっていることに注意する．以下, $[0,1]\times\{t\}$ は補題 4.3 で得られた horizontal arc とする．このとき [J2] より Q_t 上に f を制限したものは，モース関数になっているとしてよい．

定義 5.1 Q_t 上の点全体の集合に次のような同値関係を入れる．

$$x\sim y \Leftrightarrow \exists h\in[0,1] \text{ s.t. } x \text{ と } y \text{ は } f^{-1}(h) \text{ の同じ成分に含まれる}$$

この同値関係による Q_t の商空間 $Q_t/\sim$ を f から誘導される *Reeb graph* と呼ぶ．

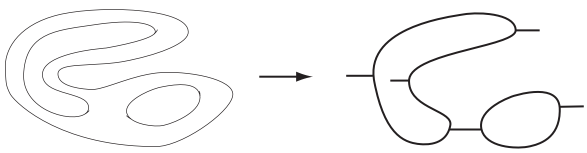


図 13

Reeb graph の各 edge 上の点は Q_t 上の essential もしくは inessential な simple closed curve に対応している．

いま，Q_t 上の essential simple closed curve に対応する edge から成る subgraph をとる．この subgraph の部分集合で horizontal arc $[0,1]\times\{t\}$ の sub-interval $[s_0+\epsilon, s_1-\epsilon]$ に対応する部分 G_e^* に次のような番号付けのルールを導入する．

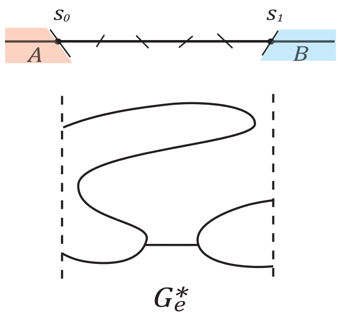


図 14

egde への番号付け

Step 0. G_e^* の左端に位置する各 edge に 1 を assign する．

Step 1. 2 価の vertex で隣り合う edge の一方に既に番号が assign されているならば，もう一方にも同じ番号を assign する．この操作を可能な限り繰り返す．

このとき，まだ番号付けされていない edge をもつ vertex で一番左側にあるものが，一意的に定まる．この vertex を v_i とする．このとき既に edge つけられた番号に対しては, 次の条件が成り立っているとする．(Step 0, 1 の直後では明らかに下の条件の (1) が成り立っている．)

Condition (*) vertex v_i は次のいずれかを満たす．

(1) vertex v_i より少し左側の位置する点を含む edge にはすべて同じ番号 n が assign されている．

(2) vertex v_i より少し左側の位置する点を含む edge には番号 $n-1$, n のいずれかが assign されている．特に $n-1$ が assign されている edge, n が assign されている edge は必ず存在する．

Step 2.

・ vertex v_i が condition(1) を満たしているならば，v_i に接しているまだ番号が assign されていない edge に $n+1$ を assign する．

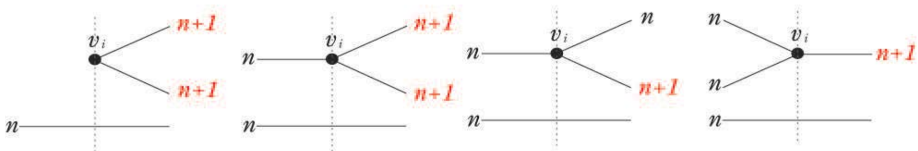


図 15

・ vertex v_i が condition(2) を満たしているならば，v_i に接しているまだ番号が assign されていない edge に n を assign する．

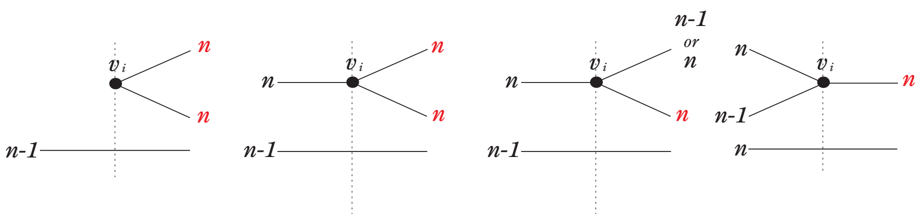


図 16

Step 1 と Step 2 は G_e^* のすべての edge に番号が assign されるまで繰り返せるということが示せる．このとき，次が得られた．

定理 5.2 $d(P) \leq \min\{G_e^*$ の右端に位置する edge に assign された番号 $\}+1$

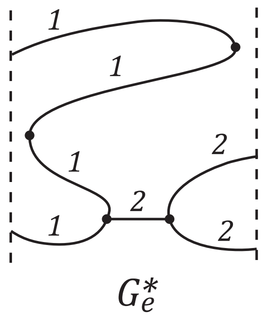


図 17　This graph gives $d(P) \leq 3$

参考文献

[C] J. Cerf, *La stratefacation naturelle des especes de fonctions differentiables reeles et la theoreme de la isotopie.*, Publ. Math. I.H.E.S. 39 (1970).

[CG] A. Casson and C. Gordon, *Reducing Heegaard splittings*, Topology Appl. 27 (1987), 275-283.

[He] J. Hempel, *3-manifolds as viewed from the curve complex*, Topology 40 (2001), no. 3, 631-657.

[HTT] J. Hass, A. Thompson, W. Thurston, *Stabilization of Heegaard splittings*, preprint (2008), ArXiv:math.GT/0802.2145v2

[J1] J. Johnson, *Stable functions and common stabilizations of Heegaard splittings*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 361, 3747-3765.

[J2] J. Johnson, *Flipping and stabilizing Heegaard splittings*, preprint (2008), ArXiv:math.GT/08054422.

[KS] T. Kobayashi and O. Saeki, *The Rubinstein-Scharlemann graphic of a 3-manifold as the discriminant set of a stable map*, Pacific Journal of Mathematics 195 (2000), no. 1, 101-156.

[RS] H. Rubinstein and M. Scharlemann, *Comparing Heegaard splittings of non-Haken 3-manifolds*, Topology 35 (1996), no. 4, 1005-1026.

[ST] M. Scharlemann and M. Tomova, *Alternate Heegaard genus bounds distance*, Geometry & Topology 10 (2006), 593-617

QUANDLE による SHADOW COLORING と PSL(2,C) 表現の体積と CHERN-SIMONS 不変量

蒲谷祐一　（大阪市立大学　数学研究所）
（井上 歩（東京工業大学大学院理工学研究科）との共同研究）

1. 概要

このノートではカンドルのホモロジーの理論を用いて双曲体積と Chern-Simons 不変量が計算できる事を報告する．講演では具体的な計算を中心に話したので、ここではあまり説明できなかった理論的な部分について記述する．ほとんどの内容は体積と Chern-Simons 不変量の計算のためだけでなくカンドルに関する一般的な結果である．

K を結び目、D をそのダイアグラムとする．カンドル X による arc coloring は K の補空間の基本群から X の associated group G_X への表現を与える事がわかる．次に shadow coloring $\mathcal{S}$ を定義し、カンドルホモロジー $H_2^Q(X;\mathbb{Z}[X])$ に値を取る不変量 $[C(\mathcal{S})]$ を定義する．このホモロジー類 $[C(\mathcal{S})]$ は K の補空間の表現の共役類のみによる量である事がわかる．よってこのホモロジー群から別の群に準同型が存在すればそれは明らかに G_X への表現の不変量になる．つぎに単体的カンドルホモロジー $H_n^\Delta(X)$ を定義しラックホモロジー $H_n^R(X;\mathbb{Z}[X])$ から単体的カンドルホモロジー $H_{n+1}^\Delta(X)$ への写像を定義する．特に３次元の場合にはカンドルホモロジーからの写像を導き、[Wee] や [Ino] で与えられた三角形分割の代数的な構成を与えている．

これらの結果を $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の放物的元のなすカンドル $\mathcal{P}$ に対して適用する．このカンドルによる彩色は結び目 K の補空間のメリディアンを放物的元に移す表現の全体と１対１に対応する．また $\mathcal{P}$ は $(\mathbb{C}^2\setminus\{0\})/\pm$ と同一視できる事を示す．この事実から $H_3^\Delta(\mathcal{P})$ は Dupont-Zickert [DZ] で研究されたホモロジーとほぼ同じである事がわかる．彼らはそのホモロジーから extended Bloch 群への写像を構成した．同様の方法で準同型 $H_2^Q(\mathcal{P};\mathbb{Z}[\mathcal{P}])\to\widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ を構成する．結果として結び目の $\mathcal{P}$ による arc coloring から extended Bloch 群の元を作る事ができる．これは Neumann により定義された $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現の不変量と一致する事がわかる．Neumann [Neu] の結果により Rogers dilogarithm 関数 R を用いて体積と Chern-Simons 不変量を計算する事ができる．

我々の作ったホモロジー $H_n^\Delta(X)$ は群の相対ホモロジーと密接に関係している．もっと簡単な形での群のホモロジーとの関連があるが他であまり触れられていないようなので群のホモロジーとの関連についても３節で解説する．

2. Quandle and Quandle homology

A quandle is a set X with a binary operation $*$ satisfying the following axioms:

(1) $x*x=x$,
(2) the map $*y:X\to X$ defined by $x\mapsto x*y$ is a bijection,
(3) $(x*y)*z=(x*z)*(y*z)$,

for any $x,y,z\in X$. We denote the inverse of $*y$ by $*^{-1}y$. For a quandle X, we define the associated group G_X by $\langle x\in X\,|\,y^{-1}xy=x*y\quad(x,y\in X)\rangle$. A quandle X has a right G_X-action in the following way. Let $g=x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\cdots x_n^{\varepsilon_n}$ be an element of G_X where $x_i\in X$ and $\varepsilon_i=\pm1$. Define $x*g=(\cdots((x*^{\varepsilon_1}x_1)*^{\varepsilon_2}x_2)\cdots)*^{\varepsilon_n}x_n$. One can easily check that this is a right action of G_X on X. So the free abelian group $\mathbb{Z}[X]$ generated by X is a right $\mathbb{Z}[G_X]$-module.

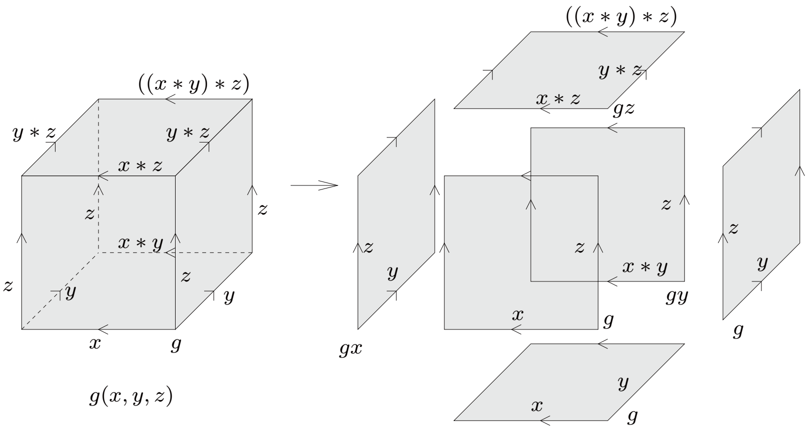


FIGURE 1. $\partial(g(x,y,z)) = -(g(y,z) - gx(y,z)) + (g(x,z) - gy(x * y,z)) - (g(x,y) - gz(x*z, y*z))$. Here $x,y,z \in X$ and $g \in G_X$. Edges are labeled by elements of X and vertices are labeled by elements of G_X.

Let $C_n^R(X)$ be the free (left) $\mathbb{Z}[G_X]$-module generated by X^n. We define the boundary map $C_n^R(X) \to C_{n-1}^R(X)$ by

$$\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i ((x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) \\ - x_i(x_1 * x_i, \ldots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)).$$

A graphical picture of the boundary map is given in Figure 1. Let $C_n^D(X) = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}[G_X]}\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i = x_{i+1} \text{for some } i)\}$ and $C_n^Q(X) = C_n^R(X)/C_n^D(X)$. Let M be a right $\mathbb{Z}[G_X]$-module. We define the *rack homology* of M by the homology of $M \otimes_{\mathbb{Z}[G_X]} C_*^R(X)$ and denote it by $H_n^R(X, M)$. We also define the *quandle homology* of M by the homology of $M \otimes_{\mathbb{Z}[G_X]} C_*^Q(X)$ and denote it by $H_n^Q(X; M)$. The homology $H_n^Q(X;\mathbb{Z})$, here $\mathbb{Z}$ is the trivial $\mathbb{Z}[G_X]$-module, is equal to the usual quandle homology $H_n^Q(X)$. Let Y be a set with a right G_X-action. Then the free abelian group $\mathbb{Z}[Y]$ generated by Y is a right $\mathbb{Z}[G_X]$-module. In this note, we will mainly study the quandle homology $H_2^Q(X;\mathbb{Z}[X])$. (This is usually denoted by $H_2^Q(X)_X$.)

3. Group homology

Let G be a group. Let $C_n(G) = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}[G]}\{[g_1|g_2|\ldots|g_n]|g_i \in G\}$ and define the boundary map $\partial : C_n(G) \to C_{n-1}(G)$ by

$$\partial([g_1|\ldots|g_n]) = g_1[g_2|\ldots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1|\ldots|g_ig_{i+1}|g_n] + (-1)^n[g_1|\ldots|g_{n-1}].$$

Let $C_0(G) \cong \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$ be the augmentation map. We remark that the chain complex $\{\cdots \to C_1(G) \to C_0(G) \to \mathbb{Z} \to 0\}$ is acyclic. So the chain complex $C_*(G)$ gives a free resolution of $\mathbb{Z}$. Let M be a right $\mathbb{Z}[G]$-module. The homology of $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_*(G)$ is called the *group homology* of M and denoted by $H_n(G;M)$. In other words, $H_n(G;M) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(M,\mathbb{Z})$.

We can construct a map from the rack homology $H_n^R(X;M)$ to the group homology $H_n(G_X;M)$. The following lemma is well-known.

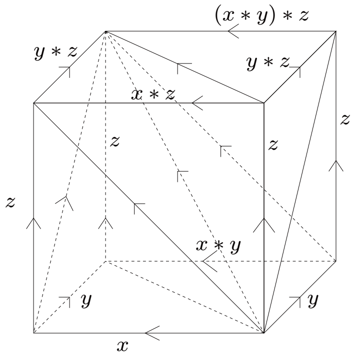


Figure 2

Lemma 3.1. *Let $\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ be a chain complex where P_i are projective (e.g. free). Let $\cdots \to C_1 \to C_0 \to N \to 0$ be an acyclic complex. Any homomorphism $M \to N$ can be extended to a chain map from $\{P_*\}$ to $\{C_*\}$. Moreover such a chain map is unique up to chain homotopy.*

So there exists a unique chain map from $C_*^R(X)$ to $C_*(G_X)$ up to homotopy. This map induces $M \otimes_{\mathbb{Z}[G_X]} C_*^R(X) \to M \otimes_{\mathbb{Z}[G_X]} C_*(G_X)$ and then $H_n^R(X;M) \to H_n(G_X;M)$. We give an explicit chain map f. Let $(x_1,\ldots,x_n)$ be a generator of $C_n^R(X)$. We define the map f by

$$f((x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)[y_{\sigma,1}|\cdots|y_{\sigma,i}|\cdots|y_{\sigma,n}]$$

where $y_{\sigma,i} \in X$ is defined for a permutation σ and $i \in \{1,\ldots,n\}$ as follows: Let $j_1,\ldots,j_{k_i} < i$ be the numbers satisfying $\sigma(i) < \sigma(j_1) < \sigma(j_2) < \cdots < \sigma(j_{k_i})$. Then define

$$y_{\sigma,i} = x_{\sigma(i)} * (x_{\sigma(j_1)} x_{\sigma(j_2)} \cdots x_{\sigma(j_{k_i})}).$$

The graphical picture of this map is given in Figure 2.

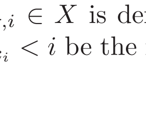
Example 3.2. Let $(x,y,z) \in C_3^R(X)$. Then the explicit chain map $f : C_3^R(X) \to C_3(G_X)$ constructed above is given by

$$\begin{aligned}\partial((x,y,z)) =& [x|y|z] - [x|z|y*z] + [y|z|(x*y)*z] - [y|x*y|z] \\ &+ [z|x*z|y*z] - [z|y*z|(x*y)*z]\end{aligned}$$

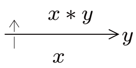
Remark 3.3. Fenn, Rourke and Sanderson defined the *Rack space* BX. Since $\pi_1(BX)$ is isomorphic to G_X, there exists a unique map, up to homotopy, from BX to the Eilenberg-MacLane space $K(G_X,1)$ which induces an isomorphism between their fundamental groups. The map we have constructed is essentially same as this map.

As we have seen, there exists a relation between quandle homology and group homology. We shall give another relation which seems to reflect more geometric feature.

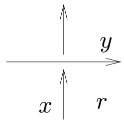
4. Shadow coloring and fundamental cycle

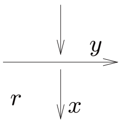
Let X be a quandle. Let K be a knot in S^3 and D be a diagram of K. An *arc coloring* is a map $\mathcal{A} : \{\text{arcs of } D\} \to X$ if it satisfies the following relation at each crossing: 

, where x, y and $x*y \in X$. By the Wirtinger presentation of a knot complement, an arc coloring determines a representation $\pi_1(S^3 \setminus K) \to G_X$. This is obtained by sending each meridian to its color.

A map $\mathcal{D}$: {regions of D} $\to X$ is called a *region coloring* if it satisfies the following relation for a pair of adjacent regions: 

, where x, y and $x*y \in X$. The notion of region coloring is generalized for any set Y with G_X-action, but we only study this special case. A pair $\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$ is called a *shadow coloring.*

We define a cycle $[C(\mathcal{S})]$ of $H_2^Q(X; \mathbb{Z}[X])$ for a shadow coloring $\mathcal{S}$ by X. Assign $+r \otimes (x, y)$ for a positive crossing colored by 

and $-r \otimes (x, y)$ for a negative crossing 

. Then we define

$$C(\mathcal{S}) = \sum_{c:\text{crossing}} \varepsilon_c r_c \otimes (x_c, y_c) \in C_2^Q(X; \mathbb{Z}[X]),$$

here $\varepsilon_c = \pm 1$. We can easily check that this is a cycle. The homology class $[C(\mathcal{S})]$ in $H_2^Q(X; \mathbb{Z}[X])$. is invariant under Reidemeister moves and does not depend on the choice of region coloring. Moreover we have

Proposition 4.1. *The homology class $[C(\mathcal{S})]$ only depends on the conjugacy class of the representation $\pi_1(S^3 \setminus K) \to G_X$ induced by the arc coloring $\mathcal{A}$.*

5. Simplicial quandle homology $H_n^\Delta(X)$ and the map $H_n^R(X; \mathbb{Z}[X]) \to H_{n+1}^\Delta(X)$

Let $C_n^\Delta(X) = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{(x_0, \dots, x_n) | x_i \in X\}$. We define the boundary operator of $C_n^\Delta(X)$ by

$$\partial(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n).$$

Since X has a right action of G_X, the chain complex $C_n^\Delta(X)$ has a right action of G_X by $(x_0, \dots, x_n) * g = (x_0 * g, \dots, x_n * g)$. We denote the homology of $C_n^\Delta(X) \otimes_{\mathbb{Z}[G_X]} \mathbb{Z}$ by $H_n^\Delta(X)$ and call it a *simplicial quandle homology* of X.

We define a set I_n consisting of maps $\iota : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{0, 1\}$. We let $|\iota|$ denote the cardinality of the set $\{i \mid \iota(i) = 1, 1 \le i \le n\}$. For each generator $r \otimes (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ of $C_n^R(X; \mathbb{Z}[X])$, here $r, x_1, \dots, x_n \in X$, we define

$$r(\iota) = r * (x_1^{\iota(1)} x_2^{\iota(2)} \cdots x_n^{\iota(n)}) \in X,$$
$$x(\iota, i) = x_i * (x_{i+1}^{\iota(i+1)} x_{i+2}^{\iota(i+2)} \cdots x_n^{\iota(n)}) \in X,$$

for any $\iota \in I_n$. Fix an element $p \in X$. For each $n \ge 1$, we define a homomorphism

$$\varphi : C_n^R(X; \mathbb{Z}[X]) \longrightarrow C_{n+1}^\Delta(X) \otimes_{\mathbb{Z}[G_X]} \mathbb{Z}$$

by

$$\varphi(r \otimes (x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \sum_{\iota \in I_n} (-1)^{|\iota|} (p, r(\iota), x(\iota, 1), x(\iota, 2), \cdots, x(\iota, n)). \tag{5.1}$$

For example, in the case $n = 2$ (see Figure 3),

$$\varphi(r \otimes (x, y)) = (p, r, x, y) - (p, r * x, x, y) - (p, r * y, x * y, y) + (p, (r * x) * y, x * y, y),$$

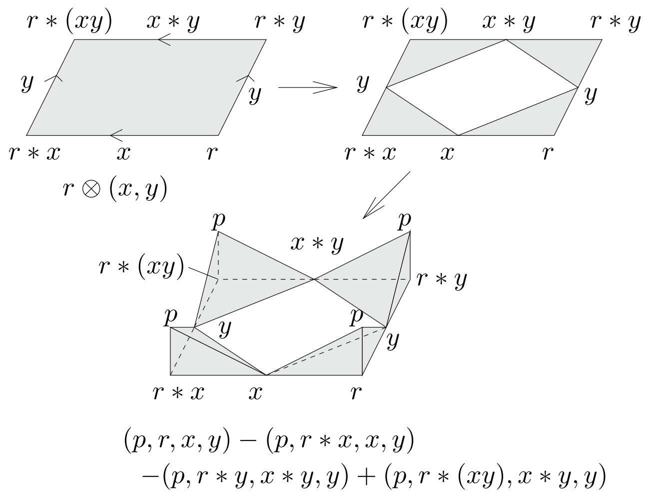


FIGURE 3

and in the case $n=3$,

$$\begin{aligned}
\varphi(r\otimes(x,y,z)) = \\
&(p,r,x,y,z)-(p,r*x,x,y,z)\\
&-(p,r*y,x*y,y,z)-(p,r*z,x*z,y*z,z)\\
&+(p,(r*x)*y,x*y,y,z)+(p,(r*x)*z,x*z,y*z,z)\\
&+(p,(r*y)*z,(x*y)*z,y*z,z)-(p,((r*x)*y)*z,(x*y)*z,y*z,z).
\end{aligned}$$

Theorem 5.1. *The map $\varphi : C_n^R(X;\mathbb{Z}[X]) \longrightarrow C_{n+1}^{\Delta}(X)\otimes_{\mathbb{Z}[G_X]}\mathbb{Z}$ is a chain map.*

So φ induces a homomorphism $\varphi_* : H_n^R(X;\mathbb{Z}[X]) \to H_{n+1}^{\Delta}(X)$. We remark that the induced map $\varphi_* : H_n^R(X;\mathbb{Z}[X]) \to H_{n+1}^{\Delta}(X)$ does not depend on the choice of $p\in X$. When $n=2$, the map reduces to the map $\varphi_* : H_2^Q(X;\mathbb{Z}[X]) \to H_3^{\Delta}(X)$

5.1. **Relative group homology.** Let G be a group. Let H be a subgroup of G. We define the relative group homology $H_n(G,H;\mathbb{Z})$ by the homology of the mapping cone of the map $C_n(H)\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Z} \to C_n(G)\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}$. We can compute $H_n(G,H;\mathbb{Z})$ as follows (see [Zic]).

Lemma 5.2. *Let K be the kernel of $C_0(H\backslash G)\to\mathbb{Z}$. Let $\cdots\to F_2\to F_1\to K\to 0$ be a free resolution of K as $\mathbb{Z}[G]$-module. Then $H_n(G,H;\mathbb{Z})\cong H_n(F_*\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z})$ for $n\geq 1$.*

Most of important quandles have a homogeneous presentation, in other words it can be presented in the form $H\backslash G$ with some group G and a subgroup H of G [Joy]. Since the complex $C_*^{\Delta}(X)$ is acyclic and have a $\mathbb{Z}[G]$-module structure, so if

$$\cdots\to C_2^{\Delta}(X)\to C_1^{\Delta}(X)\to \mathrm{Ker}(C_0^{\Delta}(X)\to\mathbb{Z})\to 0$$

is a projective resolution, $H_n^{\Delta}(X)$ is isomorphic to $H_n(G,H;\mathbb{Z})$. This is another relationship with group homology.

6. Quandle structure on $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$

Define a binary operation $*$ on $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ by

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}1-x_2y_2 & -x_2^2\\ y_2^2 & 1+x_2y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

This satisfies the quandle axioms. Let $\mathcal{P}$ be the set of the parabolic elements of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. This has a quandle structure by conjugation $x * y = y^{-1}xy$. This is isomorphic to the quandle formed by the parabolic elements of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ with trace 2 (or -2). Define a map $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathcal{P}$ by

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1-xy & -x^2 \\ y^2 & 1+xy \end{pmatrix}.$$

This is a quandle homomorphism and induces a quandle isomorphism $\mathcal{P} \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\pm$. The quandle $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\pm$ and therefore $\mathcal{P}$ has a homogeneous presentation $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})/P$ where P is the parabolic subgroup. So $H_3^{\Delta}(\mathcal{P})$ is closely related to the relative homology $H_3(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}), P; \mathbb{Z})$.

7. Extended Bloch group

The *pre-Bloch group* $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ is the quotient of the free abelian group generated by symbols $[z]$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ and the relation given by

$$[x] - [y] + \left[\frac{y}{x}\right] - \left[\frac{1-x^{-1}}{1-y^{-1}}\right] + \left[\frac{1-x}{1-y}\right] = 0$$

for each $x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ with $x \neq y$. This relation is called the *five term relation*. The *Bloch group* $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ is the kernel of the homomorphism $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^* \wedge_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ defined by $\lambda([z]) = z \wedge (1-z)$.

The *extended pre-Bloch group* $\widehat{\mathcal{P}}(\mathbb{C})$ is the quotient of the free abelian group generated by $[z; p, q]$ where $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ and $p, q \in \mathbb{Z}$ with relation given by the *lifted five term relation*, which is something like a lifting of the five term relation. In some sense, the pre-Bloch group is a lift of pre-Bloch group to the universal abelian cover of $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, and p and q represent the branches at 0 and 1 respectively. The *extended Bloch group* is the kernel of the map $\widehat{\mathcal{P}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \wedge_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ defined by $[z; p, q] \mapsto (\mathrm{Log}(z) + p\pi i) \wedge (-\mathrm{Log}(1-z) + q\pi i)$. See [Neu] for details.

We construct a map from $C_3^{\Delta}(\mathcal{P}) \to \widehat{\mathcal{P}}(\mathbb{C})$ along with the work of Dupont and Zickert [DZ]. In this note we omit the discussion on the treatment of degenerate simplices because it makes the argument more complicated. Let $(x_0, \dots, x_3)$ be an element of $C_3^{\Delta}(\mathcal{P})$. Since we have $\mathcal{P} \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\pm$, we regarded $x_0, \dots, x_3$ as 2-dimensional column vectors. We define three complex numbers by

$$\begin{aligned} w_0 &= \mathrm{Log}\det(x_0,x_3) + \mathrm{Log}\det(x_1,x_2) - \mathrm{Log}\det(x_0,x_2) - \mathrm{Log}\det(x_1,x_3), \\ w_1 &= \mathrm{Log}\det(x_0,x_2) + \mathrm{Log}\det(x_1,x_3) - \mathrm{Log}\det(x_0,x_1) - \mathrm{Log}\det(x_2,x_3), \\ w_2 &= \mathrm{Log}\det(x_0,x_1) + \mathrm{Log}\det(x_2,x_3) - \mathrm{Log}\det(x_0,x_3) - \mathrm{Log}\det(x_1,x_2). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Here $\det(x_i, x_j)$ is the determinant of $\begin{pmatrix} x_i^1 & x_j^1 \\ x_i^2 & x_j^2 \end{pmatrix}$ for $x_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{pmatrix}$ and $x_j = \begin{pmatrix} x_j^1 \\ x_j^2 \end{pmatrix}$, and the Log is defined by $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\arg(z)$ $(-\pi < \arg(z) \leq \pi)$. Since x_i are well-defined only up to sign, the value $\mathrm{Log}\det(x_i, x_j)$ has an ambiguity of $\pm\pi i$. So we fix the value of $\det(x_i, x_j)$ so that $0 \leq \arg(\det(x_i, x_j)) < \pi$. (We can show that another choice of sign does not change the image. This can be shown by using the *cycle relation* [Neu, Section 6].) Let z be the complex number defined by

$$z = \frac{(x_0^1/x_0^2 - x_3^1/x_3^2)}{(x_0^1/x_0^2 - x_2^1/x_2^2)} \frac{(x_1^1/x_1^2 - x_2^1/x_2^2)}{(x_1^1/x_1^2 - x_3^1/x_3^2)},$$

then w_0, w_1, w_2 have the following form:

$$\begin{aligned} &w_0 = \mathrm{Log}(z) + p\pi i, \quad w_1 = -\mathrm{Log}(1-z) + q\pi i, \\ &w_2 = -\mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(1-z) - (p+q)\pi i. \end{aligned}$$

here p and q are some integers. We assign $[z; p, q] \in \widehat{\mathcal{P}}(\mathbb{C})$ for $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in C_3^{\Delta}(\mathcal{P})$. This defines a map $C_3^{\Delta}(\mathcal{P}) \to \widehat{\mathcal{P}}(\mathbb{C})$ and induces the map $H_3^{\Delta}(\mathcal{P}) \to \widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ (here this is not precise statement, see Remark 7.2). Composing with the map defined in Section 5, we have the following theorem.

Theorem 7.1. *There exists a homomorphism*

$$H_2^Q(\mathcal{P}; \mathbb{Z}[\mathcal{P}]) \to \widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C}). \tag{7.2}$$

The image of the cycle $[C(\mathcal{S})]$ by this map gives the extended Bloch invariant of the parabolic representation.

Remark 7.2. We could not construct a map $C_3^{\Delta}(\mathcal{P}) \to \widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ directory because we could not remove the degenerate simplices. But we can deform any cycle of $H_2^Q(\mathcal{P}; \mathbb{Z}[\mathcal{P}])$ by adding boundary term so that the image by the map $\varphi_* : H_2^Q(\mathcal{P}; \mathbb{Z}[\mathcal{P}]) \to H_3^{\Delta}(\mathcal{P})$ consists of non-degenerate simplices without changing the homology class. So we can actually construct the map (7.2).

Neumann showed in [Neu] that $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C}) \cong H_3(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z})$. He also defined the Rogers dilogarithm function $R : \widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}$ which gives a combinatorial formula of the Cheeger-Chern-Simons class via the isomorphism. Applying the function R to the image of $[C(\mathcal{S})]$ by the map (7.2), we obtain a diagrammatic description of the volume and the Chern-Simons invariant.

References

[CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 10, 3947–3989.

[DZ] J. L. Dupont, C. Zickert, *A dilogarithmic formula for the Cheeger-Chern-Simons class*, Geom. Topol. 10 (2006), 1347–1372.

[FRS] R. Fenn, C. Rourke and B. Sanderson, *The rack space*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 2, 701–740.

[Ino] A. Inoue, *Quandle and hyperbolic volume*, preprint, arXiv:0812.0425.

[IK] A. Inoue, Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, in preparation.

[Joy] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra 23 (1982), no. 1, 37–65.

[Neu] W. Neumann, *Extended Bloch group and the Cheeger-Chern-Simons class*, Geom. Topol. 8 (2004), 413–474.

[NY] W. Neumann, J. Yang, *Bloch invariants of hyperbolic* 3*-manifolds*, Duke Math. J. 96 (1999), no. 1, 29–59.

[Wee] J. Weeks, *Computation of hyperbolic structures in knot theory*, Handbook of knot theory, 461–480, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

[Zic] C. Zickert, *The Chern-Simons invariant of a representation*, preprint, arXiv:GT/0710.2049.

On positive knots of genus two

鄭 仁大 (大阪市立大学大学院理学研究科)
岸本 健吾 (大阪市立大学大学院理学研究科)

1　はじめに

結び目の交代性の拡張として様々なものが存在するが, 本稿では概交代性と擬交代性に焦点を当てて, 種数 2 の正結び目に対して得られた結果を述べる．結び目図式が**概交代的** (**almost alternating**) であるとは, その図式のある一つの交点の上下を交換することによって交代的図式が得られることである．結び目が**概交代的**であるとは, 概交代的図式を持ち, かつ交代的でないことである．結び目が**正交代的** (**positive-alternating**) であるとは, 正かつ交代的な図式を持つことである．結び目図式が**概正交代的** (**almost positive-alternating**) であるとは, その図式のある一つの交点の上下を交換することによって正交代的図式が得られることである. 結び目が**概正交代的**であるとは, 概正交代的図式を持ち, かつ正交代的でないことである．正図式と交代的図式を別々に持つならば, 正交代的図式を持つということが Nakamura [5] によって示されているが, 正図式と概交代的図式を別々に持つならば, 概正交代的図式をもつかどうかは未解決である.

問題　結び目が正図式と概交代的図式を別々に持つならば, 概正交代的図式をもつか？

この問題は 11 交点以下の結び目, 及び種数 1 の結び目に対して正しい. 本稿の 1 つめの結果はこの問題が種数 2 の場合に正しいということを含む主張を示したことである.

定理 1. 種数 2 の正結び目は正交代的, もしくは概正交代的である.

2 つめの結果は, 定理 1 の応用として, 種数 2 の正結び目の擬交代性について得られたものである. 擬交代性については, 3 章で定義を述べる

定理 2. 種数 2 の正結び目は擬交代的である.

種数 2 の素でない正結び目は, 種数 1 の正結び目, つまり正交代的プレッツェル結び目 2 つの合成結び目なので, 正交代的かつ擬交代的であることは明らかである. したがって本稿では, 種数 2 の素な正結び目について, 定理 1, 2 が成り立つことを示す.

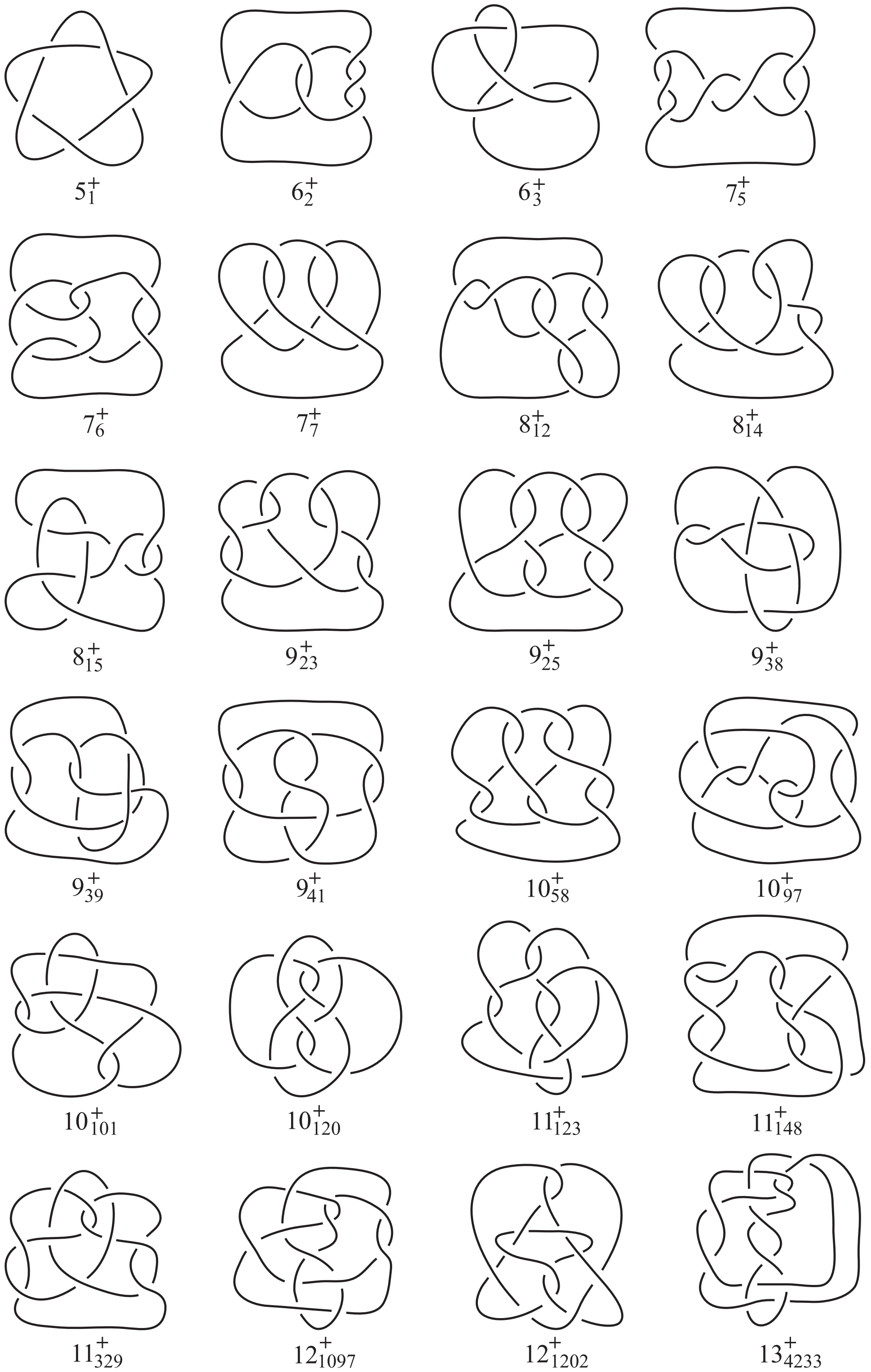


図 1: 種数 2 の正結び目の生成元

2　定理 1の証明

図 1の結び目図式を (種数 2の正結び目の) **生成元**といい, その全体の集合を $\mathcal{G}_2^+$ と表わす. 図 2のように, 図式の交点の周囲で行われる局所変形を $\overline{t'_2}$ 変形という.

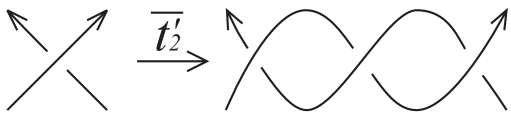


図 2: $\overline{t'_2}$ 変形

生成元の集合 $\mathcal{G}_2^+$ と $\overline{t'_2}$ 変形に関して, Stoimenow によって次が示されている.

補題 3 ([6])**.** 種数 2の素な任意の正結び目は, ある生成元に $\overline{t'_2}$ 変形を行って得られる図式によって表わされる.

定理 *1*の証明. 生成元 $G \in \mathcal{G}_2^+$ を次の 3 つの場合に分けて考える.
(1) G が交代的図式である場合:

$$5_1^+, 7_5^+, 8_{15}^+, 9_{23}^+, 9_{38}^+, 10_{101}^+, 10_{120}^+, 11_{123}^+, 11_{329}^+, 12_{1097}^+, 13_{4233}^+$$

$\overline{t'_2}$ 変形は正交代的図式の正交代性を保つため, このときこれらの生成元は正交代的結び目を生成する.
(2) G が交代的図式でないが, 交代的結び目を表す場合:

$$6_2^+, 6_3^+, 7_6^+, 7_7^+, 8_{12}^+, 8_{14}^+, 9_{25}^+, 10_{58}^+, 10_{97}^+, 11_{148}^+$$

このとき, G に $\overline{t'_2}$ 変形を行って得られる全ての図式を正交代的図式に変形できることを示す. G が 6_2^+ のときのみを証明するが, 他の場合も同様に示すことができる. 6_2^+ の各交点 c_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ に $\overline{t'_2}$ 変形を a_i 回行って得られた図式を, 図 3のように変形することにより正交代的図式が得られる.

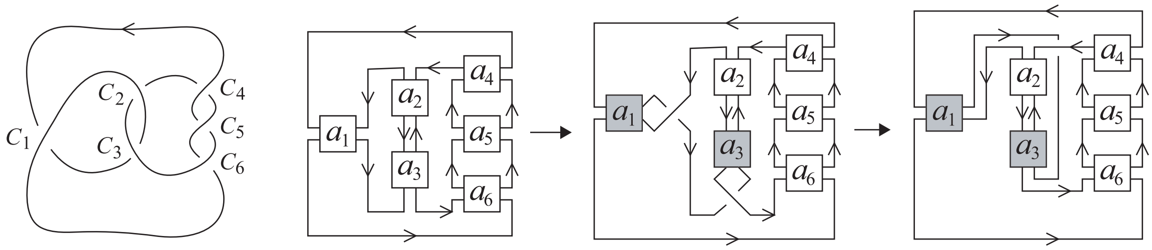


図 3:

ここで図 3内の a_i とラベル付けされたタングルは $2a_i + 1$ 回半捻りを表し, 影付きのタングルは元のタングルから交点を一つ取り出したものとする.
(3) G が交代的図式でなく, かつ非交代的結び目を表す場合:

$$9_{39}^+, 9_{41}^+, 12_{1202}^+$$

これらの生成元から得られる図式を概正交代的図式に変形することは, (2) で示した方法と同様にしてできるので省略する (詳しくは [4] を参照). よって証明の残りは生成された結び目図式が正交代的でないことを示すことである. 実際に Jones 多項式の最大次係数を計算することにより, これらの結び目の Jones 多項式が全てモニックでないことが分かる. 交代的結び目 (一般的に充足 (adequate) 結び目) の Jones 多項式はモニックであること [7] から, 生成される全ての結び目は正交代的でない. □

この証明から (1), (2) の 21 個の生成元からは正交代的結び目が, (3) の 3 つの生成元からは概正交代的結び目が得られることが分かる. しかし種数 2 の素な交代的結び目に関する先行研究 ([2], [3], [6] 参照) から, 正交代的結び目は (1) の 11 個の生成元から全て生成されることが導かれる.

系 4. 種数 2 の素な正結び目は, 次の 14 個の生成元から生成される.
(i) 5_1^+, 7_5^+, 8_{15}^+, 9_{23}^+, 9_{38}^+, 10_{101}^+, 10_{120}^+, 11_{123}^+, 11_{329}^+, 12_{1097}^+, 13_{4233}^+ (ii) 9_{39}^+, 9_{41}^+, 12_{1202}^+
特に, (i) の生成元からは正交代的結び目が, (ii) の生成元からは概正交代的結び目が生成される.

注意 5. どの生成元に対しても, その生成元からは生成できて, 他の 13 個の生成元では生成できないような種数 2 の正結び目が存在するので, 系 4 で挙げた 14 個の生成元は必要最小限である.

3 定理 2の証明

絡み目図式 D とその交点 c に対して, D_c^A と D_c^B を図 2 のような図式とする.

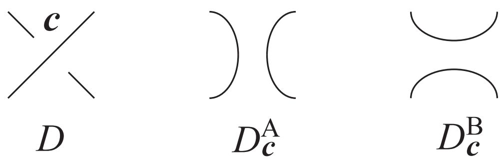


図 4:

また図式 D の表わす絡み目を $L(D)$ と表わす. 次の条件をみたす絡み目の集合 $\mathcal{S}$ を考える.

- 自明な結び目 $\in \mathcal{S}$.
- 次をみたすような, 交点 c をもつ図式 D に対して, $L(D) \in \mathcal{S}$:

  (1) $L(D_c^A), L(D_c^B) \in \mathcal{S}$,

  (2) $\det(L(D)) = \det(L(D_c^A)) + \det(L(D_c^B))$.

この条件をみたす集合は無限に存在するが, それらの共通部分を $\mathcal{Q}$ と表わす (即ち, このような集合の中で最小のものが $\mathcal{Q}$ である). 絡み目 L が $\mathcal{Q}$ に含まれるとき, L は**擬交代的** (**quasi-alternating**) であるという. 擬交代的絡み目に対して, 2 つ目の条件で表れたような図式は**交点** c **で擬交代的である**という. 非分離交代的絡み目は擬交代的であるが, 分離交代的絡み目は擬交代的でないことが定義から導かれることに注意する.

定理 *2* の証明. 系 4 から, 種数 2 の正結び目は次の生成元を調べれば十分である.

(i) 5_1^+, 7_5^+, 8_{15}^+, 9_{23}^+, 9_{38}^+, 10_{101}^+, 10_{120}^+, 11_{123}^+, 11_{329}^+, 12_{1097}^+, 13_{4233}^+　(ii) 9_{39}^+, 9_{41}^+, 12_{1202}^+

この内 (i) の 11 個から生成される結び目は全て交代的なので, 擬交代的結び目である. 残りの (ii) の 3 個から生成される結び目が擬交代的となることを 9_{41}^+ を例に挙げて示す. 9_{39}^+, 12_{1202}^+ の場合も同様にして示せるので省略する.

補題 6 ([1])**.** 交点 c で擬交代的であるような絡み目図式 D に対して, c を端点の上下情報が同じ交代的有理タングル図式 T で置き換えて得られる図式を D' とする. このとき絡み目 $L(D')$ は擬交代的である.

図 5 のように 9_{41}^+ から生成される結び目図式を D とし, a_9 でラベル付けされたタングル図式を交点 c で置き換えて得られる図式を D' とする.

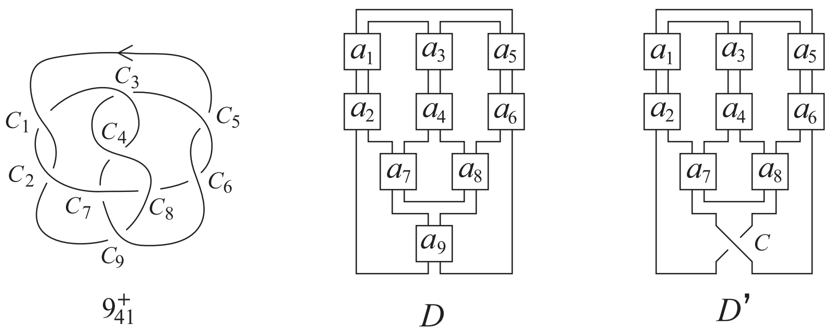


図 5:

補題 6 より, D' が交点 c で擬交代的であることを示せば, $L(D)$ が擬交代的であることが導かれる. まず図 6 のように D_c^A, D_c^B を交代的図式変形できることにより, $L(D_c^A)$, $L(D_c^B)$ が交代的絡み目であり, つまり擬交代的絡み目であることが分かる.

又, Goeritz 行列を用いることで, $\det(L(D')) = \det(L(D_c^A)) + \det(L(D_c^B))$ となることが確かめられる. 以上より, D' が交点 c で擬交代的である. □

参考文献

[1] A. Champanerkar and I. Kofman, *Twisting quasi-alternating links*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 7, 2451–2458.

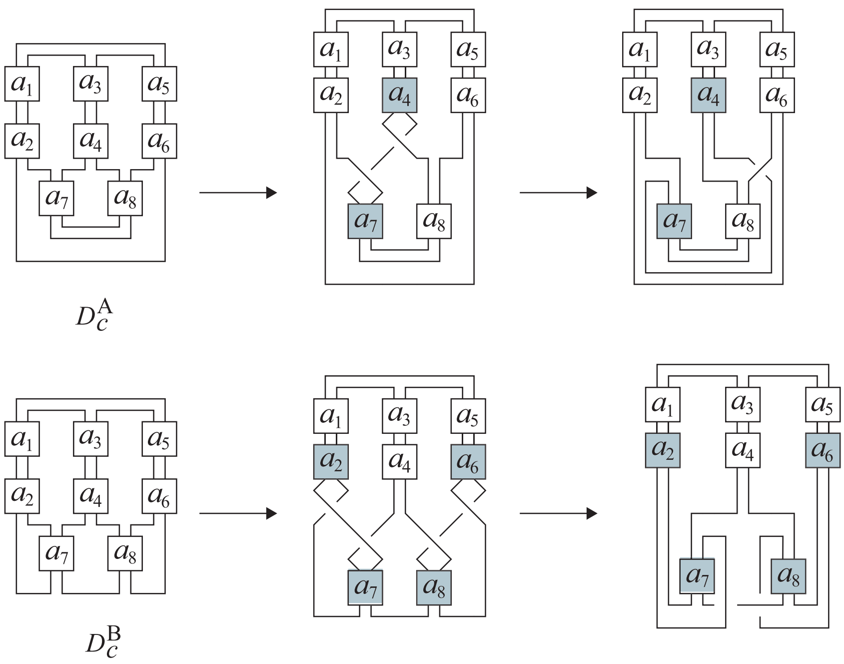


図 6:

[2] I. D. Jong, *Alexander polynomials of alternating knots of genus two*, Osaka J. Math. **46** (2009), no. 2, 353–371.

[3] I. D. Jong, *Alexander polynomials of alternating knots of genus two II*, to appear in J. Knot Theory Ramifications (2009).

[4] I. D. Jong and K. Kishimoto, *On positive knots of genus two*, preprint (2009).

[5] T. Nakamura, *Positive alternating links are positively alternating*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000), no. 1, 107–112.

[6] A. Stoimenow, *Knots of genus two*, Fund. Math. **200** (2008), no. 1, 1–67.

[7] M. B. Thistlethwaite, *A spanning tree expansion of the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), no. 3, 297–309.

Graduate School of Science, Osaka City University
E-mail: `jong@sci.osaka-cu.ac.jp`
URL: `http://www.ex.media.osaka-cu.ac.jp/~d07sa009/index.html`

Graduate School of Science, Osaka City University
E-mail: `k-kishi@sci.osaka-cu.ac.jp`

絡み目の flat plumbing basket 表示について

佐賀大学大学院　工学系研究科 数理科学専攻
中島　佑介

小林・平澤・降旗の３氏により導入された絡み目の flat plumbing basket 表示に関連して行った次の３点の考察について述べる. 証明や表の詳細については今年度提出する修士論文に記す. (1) ザイフェルトの標準形から flat plumbing basket 表示を得る方法 (2) 表示のために必要な band の最小数 (3) pass 同値との関係

1　絡み目の flat plumbing basket 表示

定義 1.1 ([1]). ザイフェルト曲面 S が *flat plumbing basket* であるとは, S が次の性質を満たすことである :
(1) S は円板 D に flat annulus を次々 plumbing して得られる.
(2) その plumbing の糊白は全て D の中にある.
$\partial S = L$ を満たす flat plumbing basket S が存在するとき, 絡み目 L は *flat plumbing basket* **表示をもつ**という.

図 2 に flat plumbing basket 表示の例を挙げておく. ここで, flat plumbing basket 表示は図 2 の一番右側の図式のように円板とその円板に proper に埋め込まれた label 付きの弧によって表すことができるが, この図式を *flat basket diagram* という.

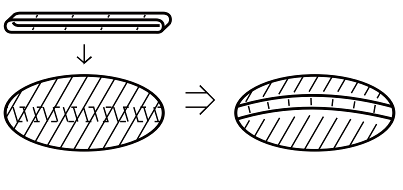


図 1: flat annulus の plumbing

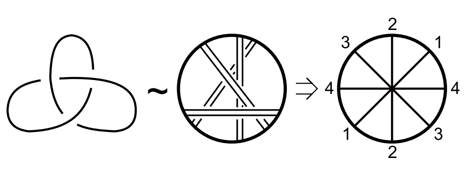


図 2: 3_1 の flat plumbing basket 表示

小林・平澤・降旗の３氏により, 以下のことが示されている.

定理 1.2 ([1]). 全ての絡み目は flat plumbing basket 表示をもつ.

[1] では絡み目の閉ブレイド表示を用いて定理 1.2. の証明を行っているが, ここではその別証明の基本的な流れを述べる.

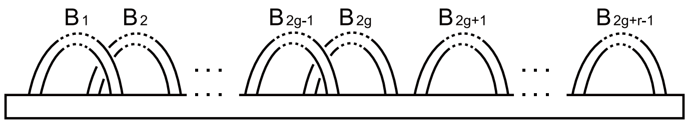


図 3:

一般に絡み目 L のザイフェルト曲面 S は, g を S の種数, r を L の成分数として, 図 3 のような 1 つの円板と $2g+r-1$ 本の band をもつ曲面に変形できる. ここで band の部分はもつれたりねじれたり, 他の band と絡まったりしているが, S は向きづけ可能なので, band のねじれの回数は偶数である. そこで, band のねじれを図 4 のように変形することにより, S の片面だけが見えるように変形することができる. このように変形したザイフェルト曲面を, **ザイフェルトの標準形**という.

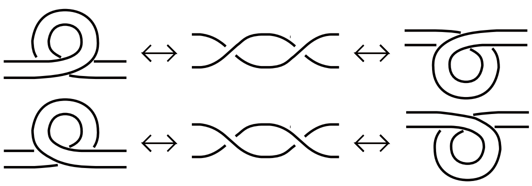


図 4:

ここで以下を定義する.

定義 1.3. 図 5 のようなザイフェルト曲面の変形を *push down* と呼ぶ.

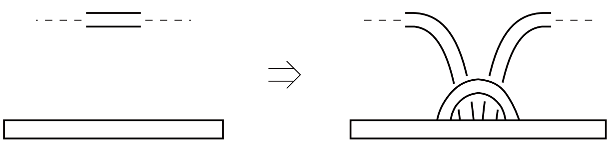


図 5: push down

Push down によって得られるザイフェルト曲面の境界はもとのものと isotopic であることに注意する.

別証明の流れ

(1) 各 band を線で略記する.

(2) 略記した線を更に, 垂直な線分と水平な線分の和として表す.

(3) 略記した線の交差点では, 上交差が水平で下交差が垂直になるようにする.

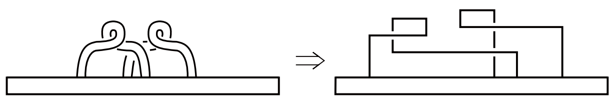


図 6: (1)(2)(3) を満たすような変形

(4) 水平な線分の中で, その端点から真上に線分が延びている場合, その箇所を真下に push down する. (図 7 参照. Push down する途中で他の略記した線と交差してしまう場合には, (3) の条件を満たすように push down する方の線分を下に通す)

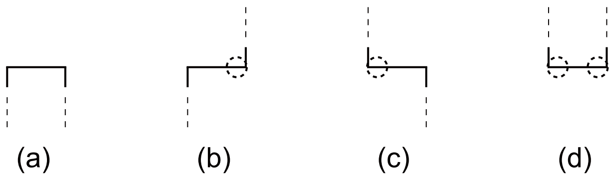


図 7:

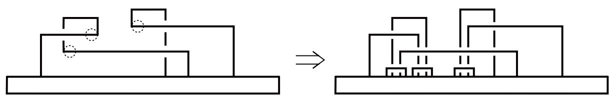


図 8: (4) を満たすような変形

このような変形を行うことによって, 全ての水平な線分を図 7 (a) の型にできる. このような曲面は flat annulus の plumbing により得られることは明らかである. [終]

2　最小 band 数の考察

定義 2.1 ([2]). 結び目 K を flat plumbing basket 表示にするために必要な最小 band 数を $fpbk(K)$ で表す.

ここでは結び目の flat plumbing basket 表示で band 数が最小となるものを考える. 定理 1.2. の [1] および別証明の方法をそのまま使うと一般に band 数はかなり多くなってしまうが, 個々の結び目に応じて適切な工夫をすることにより band 数を少なくしていくことができる. ここで得られた表示が band 数が最小となる表示かどうかの判定法について述べる.

まず, band 数が最小であるかの判定法を考える上で重要となるコンウェイ多項式の定義とその flat plumbing basket 表示の下での求め方について述べる. 絡み目 L のザイフェルト曲面を S として, S 上に (整数係数) 1 次ホモロジー群の基底となる loop $k_1, \cdots, k_n$ をとる. 更に, k_i を S の正の方向に浮かせたものを k_i^+ として

$$v_{ij} := Link(k_i^+, k_j)$$

と定める. これを成分とする行列 $V = (v_{ij}) \in M(n; \mathbf{Z})$ を, 絡み目 L の **ザイフェルト行列**という. このとき,

$$det(xV^T - x^{-1}V)$$

で, $z = x^{-1} - x$ とおいて定まる z の整数係数多項式 $\nabla(L; z)$ を, 絡み目 L の **コンウェイ多項式**という. 特に, 結び目 K のコンウェイ多項式は

$$\nabla(K; z) = a_{2n}z^{2n} + a_{2n-2}z^{2n-2} + \cdots + a_2z^2 + 1$$

のような式の形になることが知られている.

特に flat plumbing basket 表示に対して, ザイフェルト行列 V は以下のようにして求めることができる :
(1) V は対角成分が 0 である下三角行列
(2) v_{ij} $(i > j)$ は, flat basket diagram の各弧に向きを入れたものの位置関係によって, 図 9 のような値をとる.

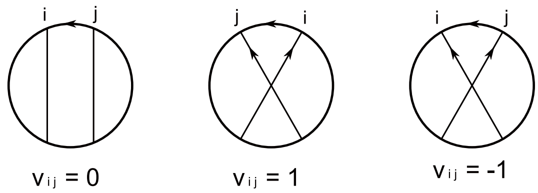
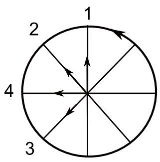


図 9: flat basket diagram に向きを入れたものと v_{ij} との関係

例 2.2. 4_1



$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla(4_1; z) &= det(xV^T - x^{-1}V) = \begin{vmatrix} 0 & -x & -x & -x \\ x^{-1} & 0 & -x & -x \\ x^{-1} & x^{-1} & 0 & x \\ x^{-1} & x^{-1} & -x^{-1} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -x^2 - x^{-2} + 3 = -(x^{-1} - x)^2 + 1 \\ &= -z^2 + 1 \end{aligned}$$

このような flat plumbing basket 表示におけるコンウェイ多項式の議論から, 以下が成り立つ.

定理 2.3 ($fpbk(K)$ の判定). 非自明な結び目 K のコンウェイ多項式 $\nabla(K; z)$ を

$$\nabla(K; z) = a_{2n}z^{2n} + a_{2n-2}z^{2n-2} + \cdots + a_2z^2 + 1 \qquad (n \neq 0, a_{2n} \neq 0)$$

とする. このとき以下が成り立つ.
(1) $a_{2n} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad fpbk(K) \geq 2n + 2$
(2) $a_{2n} \neq \pm 1 \quad \Rightarrow \quad fpbk(K) \geq 2n + 4$

この判定定理をもとに 9 交点以下の結び目に対して, band 数が最小となる flat plumbing basket 表示をある程度決定できた. 以下にその例と $fpbk(K)$ の一覧表を載せておく. 例では 1 つの結び目につき (1) 結び目の番号 (2) コンウェイ多項式 (3) $fpbk(K)$ (4) flat basket diagram を載せて

いる. ここで, 7_2 では (3) が 8?(6) となっているが, これは判定定理でいうと $fpbk(K)$ は 6 以上だが, まだ band 数 8 の flat plumbing basket 表示しか見つかっていないため $fpbk(K)$ が決定できていないということである. 一覧表でも同様に表記する.

3_1 8_6 7_2

$1+z^2$ $1-2z^2-2z^4$ $1+3z^2$

4   8   8?(6)

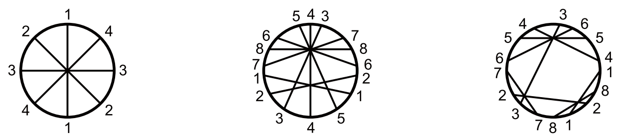


表 1: 結び目と最小 band 数の一覧

K	$fpbk(K)$	K	$fpbk(K)$	K	$fpbk(K)$	K	$fpbk(K)$	K	$fpbk(K)$
3_1	4	8_7	8	9_6	10	9_{26}	8	9_{46}	6
4_1	4	8_8	8	9_7	10?(8)	9_{27}	8	9_{47}	8
5_1	6	8_9	8	9_8	8	9_{28}	8	9_{48}	6
5_2	6	8_{10}	8	9_9	10	9_{29}	10?(8)	9_{49}	10?(8)
6_1	6	8_{11}	8	9_{10}	10?(8)	9_{30}	8		
6_2	6	8_{12}	6	9_{11}	8	9_{31}	8		
6_3	6	8_{13}	8	9_{12}	8	9_{32}	8		
7_1	8	8_{14}	8	9_{13}	10?(8)	9_{33}	8		
7_2	8?(6)	8_{15}	10?(8)	9_{14}	8	9_{34}	12?(8)		
7_3	8	8_{16}	8	9_{15}	8	9_{35}	10?(6)		
7_4	8?(6)	8_{17}	8	9_{16}	10	9_{36}	8		
7_5	8	8_{18}	8	9_{17}	8	9_{37}	8		
7_6	6	8_{19}	10?(8)	9_{18}	10?(8)	9_{38}	10?(8)		
7_7	6	8_{20}	6	9_{19}	8	9_{39}	10?(8)		
8_1	8?(6)	8_{21}	6	9_{20}	8	9_{40}	12?(8)		
8_2	8	9_1	10	9_{21}	8	9_{41}	10?(8)		
8_3	6	9_2	10?(6)	9_{22}	8	9_{42}	6		
8_4	8	9_3	10	9_{23}	10?(8)	9_{43}	10?(8)		
8_5	8	9_4	10?(8)	9_{24}	10?(8)	9_{44}	8?(6)		
8_6	8	9_5	10?(6)	9_{25}	10?(8)	9_{45}	8?(6)		

系 2.4. K が非自明なトーラス結び目 $T(2, \pm(2n+1))$ $(n \in \mathbf{N})$ ならば $fpbk(K) = 2n+2$ である.

3　f.p.b. 同値と pass 同値

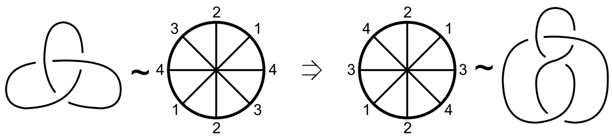


図 10: band の上下の入れ替えによる変形

ここでは図 10 のような flat plumbing basket の band の上下の入れ替えによる絡み目の変形について述べる. まず, 以下を定義する.

定義 3.1. (1) flat basket diagram $\mathcal{D}$ からその各弧の label を無視したものを *underlying diagram* と呼び, $\overline{\mathcal{D}}$ と表す.
(2) L, L' を絡み目とする. ある underlying diagram $\overline{\mathcal{D}}$ に対し, $\overline{\mathcal{D}}$ の各弧の label 付けとして L の flat basket diagram を表すものと L' の flat basket diagram を表すものが得られるとき, L と L' は *underlying diagram* **を共有する**という.
(3) L, L' を絡み目とする. L と L' に対し, ある絡み目の列 $L = L_0$, L_1 , L_2 , $\cdots$, $L_n = L'$ が存在して, 各 $i (= 0, \cdots, n-1)$ について L_i と L_{i+1} が underlying diagram を共有するとき, L と L' は *f.p.b.* **同値**であるという.

続いて, L. Kauffman([3]) により導入された pass 同値を定義する.

定義 3.2 ([3]). (1) 図 11 のような絡み目の変形を *pass move* と呼ぶ.
(2) L , L' を絡み目とする. L に有限回 pass move を行うことにより L' を得られるとき, L と L' は *pass* **同値** であるという.

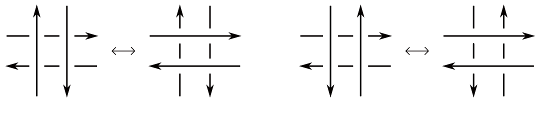


図 11: pass move

この 2 つの同値関係について, 以下が成り立つ.

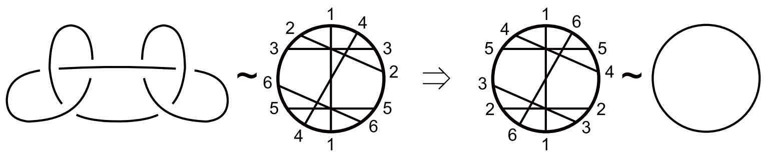
定理 3.3. L と L' が f.p.b. 同値 $\Longleftrightarrow$ L と L' が pass 同値

証明の流れ

　ここでは結び目の場合についてのみ述べることにする. 証明は次の手順で行う.

(1) 定理 1.2. の別証明の方法により, ザイフェルトの標準形の band の任意の交差の入れ替えを, ある flat plumbing basket 表示の band の上下の入れ替えによって行えることを示す.

(2) $3_1 \sharp 3_1^*$ と自明な結び目が underlying diagram を共有していることを示す (下図参照).



[終]

参考文献

[1] R. Furihata, M. Hirasawa, T. Kobayashi : Seifert surfaces in open books, and a new coding algorithm for links, Bull. Lond. Math. Soc. 40(2008), no. 3, 405-414

[2] Y. Bae, D. Kim, C. Park : Basket, flat plumbing and flat plumbing basket numbers of links, arXiv:math/0607079 (2006)

[3] L. Kauffman : Formal knot theory, Mathematical Notes, 30. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983

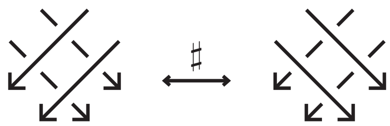
結び目のシャープゴルディアン距離について

岸本　進也（大阪市立大学大学院理学研究科）
E-mail:five1984@gmail.com

1　はじめに

この章では, シャープ変形とシャープゴルディアン距離について述べる.

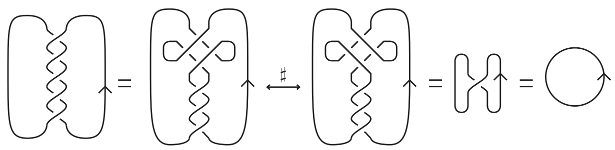
定義 1.1 ([2]). **シャープ変形** ($\sharp$-move) とは, 向き付けられた結び目図式に対して定義される局所変形である.



シャープ変形は以下のような性質を持つことが知られている.

定理 1.2 ([2]). シャープ変形は結び目解消操作である.

例 1.3. 以下の結び目はシャープ変形を用いることで自明な結び目に変形できる.



次に、与えられた２つの結び目の間の距離を, シャープ変形を用いてを定義する.

定義 1.4 ([2]). 2 つの結び目 K, K' の間の**シャープゴルディアン距離** ($\sharp$-Gordian distance)$d_G^{\sharp}(K, K')$ とは, K を K' に変形する為に必要なシャープ変形の最小回数のことを言う. 特に結び目 K と自明な結び目の間のシャープゴルディアン距離を**シャープ結び目解消数** ($\sharp$-unknotting number)$u^{\sharp}(K)$ と言う.

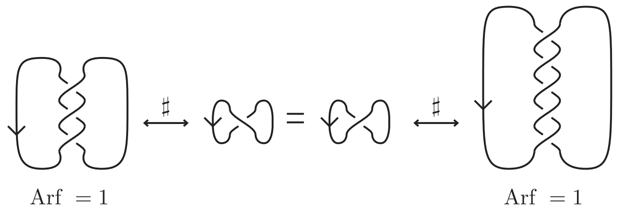
シャープゴルディアン距離について以下のような性質が知られている.

定理 1.5 ([2]). 任意の結び目 K, K' について, 次が成り立つ.

$$d_G^{\sharp}(K, K') \equiv \mathrm{Arf}(K) - \mathrm{Arf}(K') \pmod 2.$$

ここで $\mathrm{Arf}(K)$ は結び目のアーフ不変量である.

例 1.6. 以下の 2 つの結び目の間のシャープゴルディアン距離は 2 である.

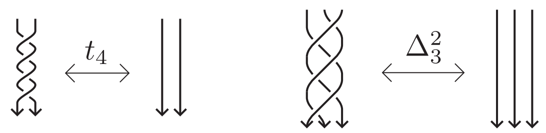


アーフ不変量の差が 0 の為シャープゴルディアン距離は偶数である. 実際に 2 回のシャープ変形で移りあうのでシャープゴルディアン距離が 2 であることがわかる.

2　シャープ変形に含まれる変形

第 1 章ではシャープ変形の性質について述べた. 第 2 章ではシャープ変形に含まれている変形について述べる.

定義 2.1. t_4 **変形** (t_4-move)、Δ_3^2 **変形** (Δ_3^2-move) とは, 向き付けられた結び目図式に対して定義される以下の様な局所変形である.



次に、シャープゴルディアン距離と同様に t_4 変形と Δ_3^2 変形に対して距離を定義する.

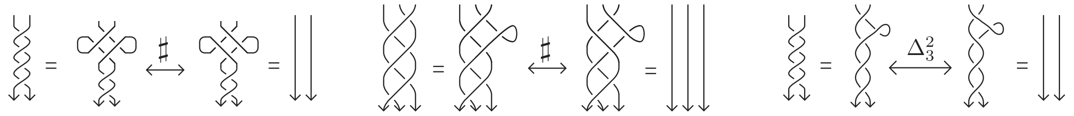
定義 2.2. 2 つの結び目 K, K' の間の t_4 **ゴルディアン距離** $d_G^{t_4}(K, K')$,Δ_3^2 **ゴルディアン距離** $d_G^{\Delta_3^2}(K, K')$ とは, K を K' に変形する為に必要な t_4 変形, Δ_3^2 変形の最小回数のことを言う.

注意 2.3. t_4 変形及び Δ_3^2 変形は結び目解消操作であるかどうかが知られていない為、任意の結び目の組 (K,K') の t_4 ゴルディアン距離、Δ_3^2 ゴルディアン距離がそれぞれ有限値を取るかわからない. 本論文では距離が定まらない場合、距離を無限とする.

命題 2.4.

$$d_G^{\sharp}(K_1, K_2) \leq d_G^{t_4}(K, K') \leq d_G^{\Delta_3^2}(K, K').$$

証明. t_4 変形及び Δ_3^2 変形がシャープ変形 1 回で実現できることと, t_4 変形が Δ_3^2 変形 1 回で実現できることを示せば十分である.



3　主結果

第 3 章では、シャープゴルディアン距離について得られた定理を紹介し、その定理が成り立つことを示す.

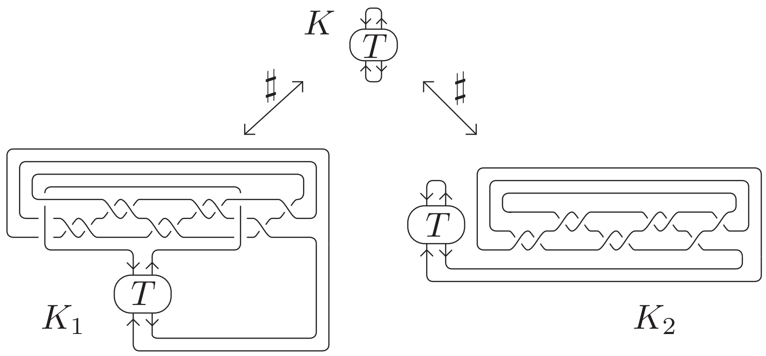
定理 3.1. 任意の結び目 K に対して以下の条件 *(1)(2)(3)* を満たす結び目の組 (K_1, K_2) が存在する.

(1)　$d^{\sharp}_{G}(K,\, K_i) = 1 \quad (i = 1,\, 2)$,

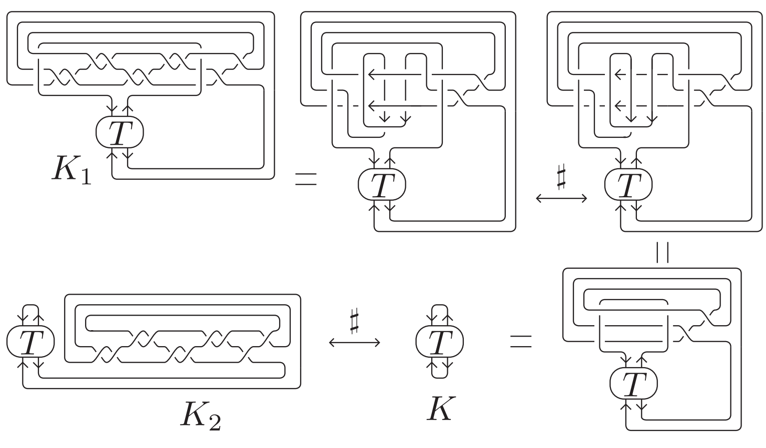
(2)　$d^{\sharp}_{G}(K_1,\, K_2) = 2,\ d^{t_4}_{G}(K_1, K_2) \geq 4,\ d^{\Delta^2_3}_{G}(K_1, K_2) \geq 4$,

(3)　$d^{\sharp}_{G}(K_i,\, J_n) = 1$ をみたす無限個の異なる結び目の族 $\{J_n\}$ $(n \in Z)$ が存在する.

(1) の証明. 始めに、任意の結び目 K に対して (1) を満たす結び目の組 $(K_1,\, K_2)$ を以下のように構成する.

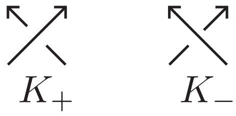


ここで T は図のように閉じたときに K を表す任意のタングル, K_2 は K と $10_{139}!$ との連結和である.
$d^{\sharp}_{G}(K,\, K_1) = 1,\ d^{\sharp}_{G}(K,\, K_2) = 1$ を以下の図により示す.



(2) の証明. (1) の証明より, $d^{\sharp}_{G}(K_1,\, K_2) = 2$ は自然と導ける. $d^{t_4}_{G}(K_1, K_2) \geq 4,\ d^{\Delta^2_3}_{G}(K_1, K_2) \geq 4$ を証明する為に**ラスムッセン不変量** $s(K)$ を用いる [3] .

補題 3.2. 正の交差点を持つある結び目を K_+ とし, K_+ の正の交差点を一点だけ交差交換した結び目を K_- とする.



(i) $s(K_+) - s(K_-) \in \{0, 2\}$.

(ii) $s(K \# K') = s(K) + s(K')$.

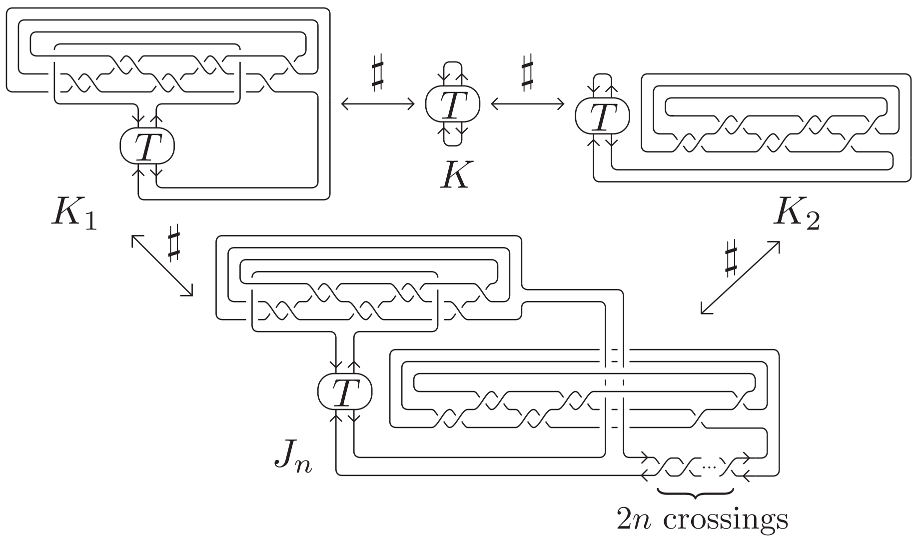
(iii) $s(K!) = -s(K)$.

この補題を用いて K_1,K_2 のラスムッセン不変量の差を計算すると.

$$|s(K_1) - s(K_2)| = 14 \text{ or } 16.$$

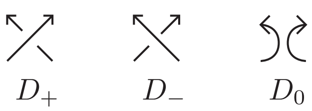
ということがわかる.
t_4 変形は交差交換 2 回で実現される局所変形の為, 補題の (ii) より t_4 変形 1 回でラスムッセン不変量は最大 4 変化する. これより $d_G^{t_4}(K_1, K_2) \geq 4$.
同様に Δ_3^2 変形は交差交換 3 回で実現される局所変形の為, $d_G^{\Delta_3^2}(K_1, K_2) \geq 3$, ここで $d_G^{\sharp}(K_1,\, K_2) = 2$ より K_1,K_2 のアーフ不変量の差は 0, よって $d_G^{\Delta_3^2}(K_1, K_2) \geq 4$.

(3) の証明. K_1,K_2 に対して J_n を以下のように構成する.



任意の整数 $l \neq m$ に対して, $J_l \neq J_m$ となることを示す為に次の多項式を導入する.

定義 3.3 ([1])**.** 絡み目 L の **0 係数多項式** (0-th coefficient polynomial) $c_0(L; x)$ とは, 以下の (i), (ii) の公理をみたす $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ に値をとる絡み目の不変量である.



(i) $c_0(\mathrm{O}; x) = 1$.

(ii) $-xc_0(D_+; x) + c_0(D_-; x) = c_0(D_0; x)$.

J_n の 0 係数多項式を計算すると

$$c_0(J_n) = x^{-n}(c_0(J_0) - c_0(K_1)c_0(10_{139}!)) + c_0(K_1)c_0(10_{139}!).$$

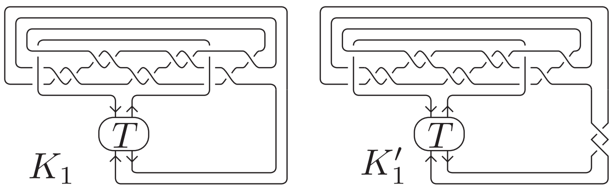
ここで $l \neq m$ としたとき

$$c_0(J_l) - c_0(J_m) = (x^{-l} - x^{-m})(c_0(J_0) - c_0(K_1)c_0(10_{139}!)).$$

$(x^{-l} - x^{-m}) \neq 0$ より, $c_0(J_0) - c_0(K_1)c_0(10_{139!}) \neq 0$ を示せばよい.

$$c_0(J_0) - c_0(K_1)c_0(10_{139!}) = (c_0(10_{139!}) - c_0(10_{139}))c_0(K_1) + (1-x)2x^5c_0(K_1').$$

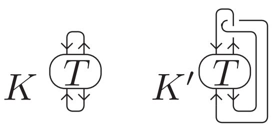
ここで K_1, K_1' は



$c_0(10_{139})$, $c_0(10_{139!})$, $c_0(K_1)$, $c_0(K_1')$ を計算するとそれぞれ以下の多項式になる.

$$\begin{aligned}
c_0(10_{139}) &= x^{-6} - 6x^{-5} + 6x^{-4}.\\
c_0(10_{139!}) &= x^{6} - 6x^{5} + 6x^{4}.\\
c_0(K_1) &= (4x^{-4} - 4x^{-5} + x^{-6})c_0(K) + (x^{-3} - x^{-4})c_0(K').\\
c_0(K_1') &= (3x^{-6} - 8x^{-5} + 6x^{-4})c_0(K) + (x^{-4} - x^{-5})c_0(K').
\end{aligned}$$

ここで K, K' は



$$\begin{aligned}
&c_0(J_0) - c_0(K_1)c_0(10_{139!})\\
&= x^{-12}(x^2(1-x)^2(1 - 5x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 - 7x^{10} + x^{11})c_0(K')\\
&\quad +(1-x)(-1 + 9x - 25x^2 + 23x^3 - x^4 - x^5 - x^6 - x^7 - x^8 - x^9 + 5x^{10} - 19x^{11} + 8x^{12} + 8x^{13})c_0(K)).
\end{aligned}$$

$c_0(J_0) - c_0(K_1)c_0(10_{139!}) = 0$ と仮定すると
$-x^2(1-x)^2(1 - 5x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 - 7x^{10} + x^{11})c_0(K')$
$=(1-x)(-1 + 9x - 25x^2 + 23x^3 - x^4 - x^5 - x^6 - x^7 - x^8 - x^9 + 5x^{10} - 19x^{11} + 8x^{12} + 8x^{13})c_0(K).$
ここで 0 係数多項式の性質を紹介する.

補題 3.4 ([1]). K が結び目 $\Longleftrightarrow$ $x = 1$ のとき $c_0(K) = 1$.

補題より $c_0(K)$, $c_0(K')$ は結び目なので $(1-x)$ を因子として持たない. 左辺と右辺では因子として持つ $(1-x)$ の数が違うので多項式として等しくないため矛盾.
よって $c_0(J_0) - c_0(K_1)c_0(10_{139!}) \neq 0$ であるので, $J_l \neq J_m$ となる □

参考文献

[1] 河内明夫, レクチャー結び目理論, 共立出版 (2007).

[2] H. Murakami, *Some metrics on classical knots*, Math. Ann. **270** (1985), no. 1, 35–45.

[3] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, to appear in Invent. Math.

GROMOV HYPERBOLICITY OF A VARIATION OF THE GORDIAN COMPLEX

市原一裕 (KAZUHIRO ICHIHARA) AND 鄭仁大 (IN DAE JONG)

Abstract. 本稿では, 結び目不変量と局所変形を用いることで定義される単体的複体を導入する. これは, Hirasawa-Uchida によって導入された Gordian 複体の一般化となっている. 特に, Alexander-Conway 多項式と Delta 変形を用いることで定まる単体的複体について考え, それが Gromov 双曲的であることを示す.

1. 導入

$\mathcal{K}$ を 3 次元球面内の結び目全体が成す集合とする. λ を結び目上の局所変形とする. 結び目 K と K' の **λ-Gordian 距離** $d^{\lambda}(K,K')$ とは, K を K' に変形するために必要な局所変形 λ の最小回数のことである. このような最小値が存在しない場合は, $d^{\lambda}(K,K')=\infty$ とおく. 特に交差交換 (x で表す) に対して, d^{x} は **Gordian 距離**と呼ばれる. Hirasawa-Uchida [8] は Gordian 距離を用いて **Gordian 複体** $\mathcal{G}^{\mathrm{x}}$ を導入した. これの一般化である **λ-Gordian 複体** $\mathcal{G}^{\lambda}$ は次のように定義される (cf. [14, Section 1]);

- $\mathcal{G}^{\lambda}$ の頂点集合 $=\mathcal{K}$,
- $K_0,K_1,\ldots,K_n\in\mathcal{K}$ が n–単体を張る $\Leftrightarrow$ $d^{\lambda}(K_i,K_j)=1$ $(i\neq j\in\{0,1,\ldots,n\})$.

ここで, $\mathcal{G}^{\lambda}$ (resp. $\mathcal{G}^{\mathrm{x}}$) の 1 次元骨格を **λ-Gordian グラフ** (resp. **Gordian グラフ**) と呼び, G^{λ} (resp. G^{x}) で表す. 各辺の長さが 1 であると仮定することで G^{λ} は距離空間となり, さらに各連結成分は測地空間となる (cf. Section 3). 測地空間の重要な性質の 1 つとして Gromov 双曲性 [6] (cf. Section 3) が挙げられる. これについて次のことが知られている.

命題 1.1 ([4, Theorem C]). G^{x} は Gromov 双曲的でない.

本稿では, 結び目不変量と局所変形を用いることで新しい単体的複体の族を導入する. (大雑把な言い方をすると, λ-Gordian 複体を “結び目不変量で割る” ことで新しい単体的複体を導入する) . 特に, 不変量として Alexander-Conway 多項式を用いて得られる単体的複体とその 1 次元骨格グラフの Gromov 双曲性について考える.

2. (ι,λ)-Gordian 複体

ここでは結び目不変量と局所変形を用いることで新しい単体的複体を導入する. ι を結び目不変量とする. $K,K'\in\mathcal{K}$ に対して, $\iota(K)=\iota(K')$ が成り立つとき, $K\sim_{\iota}K'$ と表す. この二項関係 $\sim_{\iota}$ は $\mathcal{K}$ 上の同値関係を定める. K で代表される同値類を $[K]_{\iota}$ で表し, $\mathcal{K}_{\iota}=\{\,[K]_{\iota}\mid K\in\mathcal{K}\,\}$ とする.

The first author is partially supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B), No. 20740039, Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

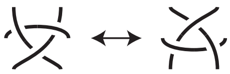


FIGURE 1. Delta-変形.

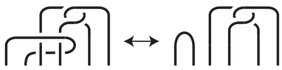


FIGURE 2. C_2-変形.

定義 2.1. ιを結び目不変量, λを結び目上の局所変形とする. (ι,λ)**-Gordian 複体** $\mathcal{G}_\iota^\lambda$ は, 次で定義される単体的複体である;

- $\mathcal{G}_\iota^\lambda$ の頂点集合 $=\mathcal{K}_\iota$,
- $[K_0]_\iota,[K_1]_\iota,\ldots,[K_n]_\iota$ が n–単体を張る $\Leftrightarrow \forall i\neq j\in\{0,1,\ldots,n\}$ について, $\exists K_{i,j}\in[K_i]_\iota$, $\exists K_{j,i}\in[K_j]_\iota$ s.t. $d^\lambda(K_{i,j},K_{j,i})=1$.

$\mathcal{G}_\iota^\lambda$ の 1 次元骨格を (ι,λ)**-Gordian グラフ**といい, G_ι^λ で表す.

∇_K を結び目 K の Conway 多項式 [3] とする. Delta-変形 [12], [13] とは, 図 1 で表される局所変形のことで, これを記号 Δ で表す. この局所変形は, C_2-変形 (図 2) と同値であることが知られている. (C_2-変形は, Goussarov [5] と Habiro [7] によって独立に導入された C_n-変形と呼ばれる局所変形の特別な場合である.)

Conway 多項式と Delta 変形を用いることで, (∇,Δ)-Gordian 複体 $\mathcal{G}_\nabla^\Delta$ と, (∇,Δ)-Gordian グラフ G_∇^Δ が定義 2.1 で述べた方法で構成される. このとき, 次が成り立つ.

定理 2.2. G_∇^Δ は Gromov 双曲的である.

注意 2.3. Delta-変形は結び目解消操作である [13] ので, G_∇^Δ は連結グラフである.

定理 2.2 の証明は Section 5 で与える.

3. GROMOV 双曲性

この章では, Gromov 双曲性の定義を紹介する (詳しくは [2] 又は [6] を参照). 距離空間 X 内の任意の 2 点に対して, それらを結ぶ測地線 (i.e. 最短距離の道) が存在するとき, X は**測地空間**であるという.

例 3.1. Γを連結グラフとする. Γの 2 頂点 v,v' に対して, それらを端点とする辺を $\overline{vv'}$ で表す. Γの各辺の長さが 1 であると仮定することで, 連結グラフ Γ は測地空間となる.

測地空間内の 2 点 x,y を結ぶ測地線を $s(x,y)$ で表す. 各辺が測地線であるような三角形を**測地三角形**という. ある実数 $\delta\geq 0$ に対して, 各辺が他の 2 辺の δ-近傍に含まれるとき, その三角形は δ**-slim** であるという. X に含まれる全ての測地三角形が δ-slim であるとき, 測地空間 X は δ**-双曲的** (又は, **Gromov 双曲的**) であるという.

注意 3.2. 測地空間 X が δ-双曲的のとき, $\delta'\geq\delta$ を満たす δ' に対しても X は δ'-双曲的.

例 3.3.
- 木 (サイクルを持たないグラフ) は 0-双曲的.
- $\mathbb{R}^2$ は Gromov 双曲的でない.
- $\mathbb{H}^2$ は $(\log 3)/2$-双曲的.
- 直径が $r(<\infty)$ のグラフは r-双曲的.

4. (∇, Δ)-Gordian 距離

Section 1 で定義した (∇, Δ)-Gordian グラフ G^{Δ}_{∇} は, 各辺の長さが 1 であると仮定することで測地空間とみなせる (cf. 例 3.1). 測地空間 G^{Δ}_{∇} 上の距離を d^{Δ}_{∇} で表す. 以降では特に断らない限り, G^{Δ}_{∇} の頂点 $[K]_{\nabla}$ を $[K]$ で表すことにする.

以下では G^{Δ}_{∇} 上の距離 d^{Δ}_{∇} について考察する. 結び目 K に対して, $a_n(K)$ を K の Conway 多項式の n 次係数とする.

補題 4.1 ([16])**.** $d^{\Delta}(K, K') = 1$ を満たす $K, K' \in \mathcal{K}$ に対して, $a_2(K) - a_2(K') = \pm 1$.

ここで, $\forall K_1, K_2 \in [K]$ に対して $a_2(K_1) = a_2(K_2)$ が成り立つことより, 頂点 $[K]$ に対して整数 $a_2(K)$ が一意的に定まることに注意しておく. このとき, 補題 4.1 よりただちに次の補題を得る.

補題 4.2. 任意の $[K], [K'] \in \mathcal{K}_{\nabla}$ に対して, 次の 2 つが成り立つ.
- $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) \geq |a_2(K) - a_2(K')|$.
- $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) \equiv |a_2(K) - a_2(K')| \mod 2$.

次の補題は, 特別な場合 ($|a_2(K) - a_2(K')| = 1$ の場合) を除いて (∇, Δ)-Gordian 距離を決定するものである.

補題 4.3. 任意の $[K] \neq [K'] \in \mathcal{K}_{\nabla}$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $a_2(K) = a_2(K')$ のとき, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) = 2$.
(2) $|a_2(K) - a_2(K')| \geq 2$ のとき, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) = |a_2(K) - a_2(K')|$.
(3) $|a_2(K) - a_2(K')| = 1$ のとき, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) = 1$ 又は 3.

証明. $K_+(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ と $K_-(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を各々Figure 3 の結び目とする. 但し $n \geq 2$ とし, $\alpha_n \neq 0$ とする. これらの Conway 多項式を計算すると,

$$\nabla_{K_+(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = \nabla_{K_-(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_i z^{2i}$$

となる (cf. [19, Lemma 3.1], [20, Proposition 1]). 又, ツイスト結び目 K_m (Figure 4) に対して, $\nabla_{K_m} = 1 + mz^2$ が成り立つ. Figure 3 の破線内にて C_2-変形を施すことで,

$$d^{\Delta}(K_+(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), K_{\alpha_1+1}) = 1, \qquad d^{\Delta}(K_-(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), K_{\alpha_1-1}) = 1$$

となることが分かる. 又, Figure 5 が示すように, $d^{\Delta}(K_{m+1}, K_m) = 1$ が成り立つ.

$[K] \neq [K'] \in \mathcal{K}_{\nabla}$ に対して, $\nabla_K = 1 + a_2 z^2 + \cdots + a_{2n} z^{2n}$, $\nabla_{K'} = 1 + a'_2 z^2 + \cdots + a'_{2m} z^{2m}$ とする.

$$J_+ = \begin{cases} K_{a_2} & a_4 = \cdots = a_{2n} = 0, \\ K_+(a_2, -a_4, \ldots, (-1)^{n-1} a_{2n}) & \text{その他}, \end{cases}$$

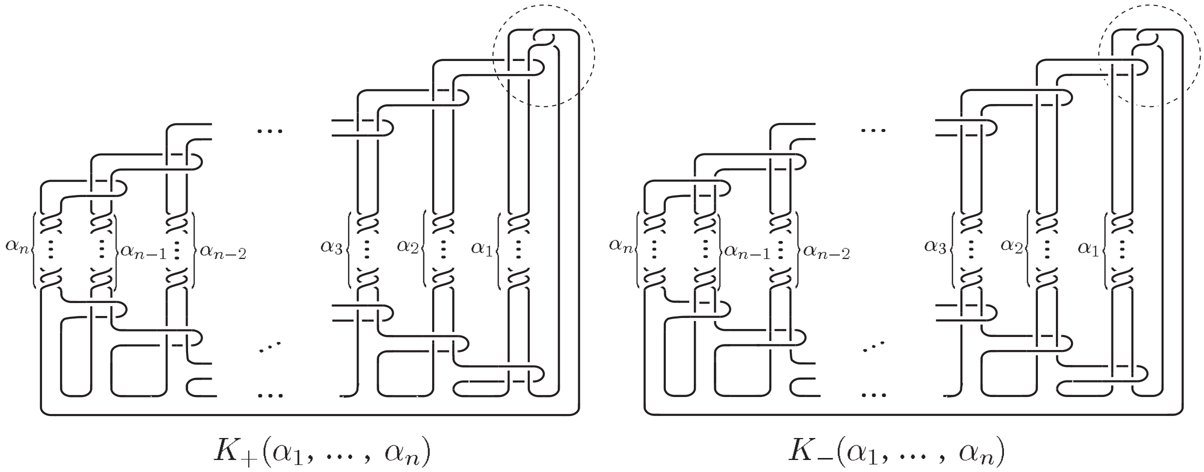


FIGURE 3. 各々, α_i 回のフルツイストを表す.

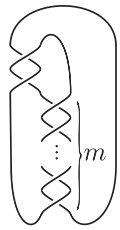


FIGURE 4. m 回のフルツイスト.

$$J'_{\pm} = \begin{cases} K_{a'_2} & a'_4 = \cdots = a'_{2m} = 0, \\ K_{\pm}(a'_2, -a'_4, \dots, (-1)^{m-1}a'_{2m}) & \text{その他} \end{cases}$$

とおく. ここで, $J_+ \in [K]$ かつ $J'_{\pm} \in [K']$ であることに注意しておく. 以下で各場合に分けて証明を進める.

(1) $a_2 = a'_2$ とする. 補題 4.2 より, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K'])$ は正の偶数なので, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) \geq 2$. 一方で, 結び目の列 J_+, K_{a_2+1}, J'_+ を考えることで, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) \leq 2$ であることがわかる, 即ち, この結び目たちは次の 3 つの条件を満たす: $d^{\Delta}(J_+, J'_+) \leq 2$, $\nabla_{J_+} = \nabla_K$, $\nabla_{J'_+} = \nabla_{K'}$. よって, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) = 2$.

(2) $a'_2 \geq a_2 + 2$ としてよい. 補題 4.2 より, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) \geq a'_2 - a_2$. 一方で, 結び目の列 $J_+, K_{a_2+1}, \dots, K_{a'_2-1}, J'_-$ を考えることで, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) \leq a'_2 - a_2$ であることがわかり, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) = a'_2 - a_2$ となる.

(3) $a'_2 = a_2 + 1$ としてよい. 補題 4.2 より, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K'])$ は正の奇数となる. 一方で, 結び目の列 J_+, K_{a_2+1}, $K_{a_2} = K_{a'_2-1}$, J'_- を考えることで, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) \leq 3$ であることがわかる. よって, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) = 1$, 又は 3 となる.

□

注意 4.4. $|a_2(K) - a_2(K')| = 1$, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) = 3$ のような例は見つかっていない.

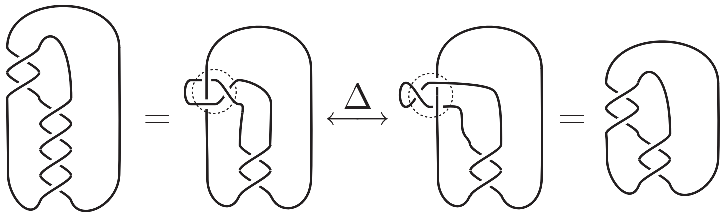


FIGURE 5. $m = 1$ の場合の図. $m \neq 1$ の場合も同様.

5. 定理 2.2 の証明

点 $p \in G_{\nabla}^{\triangle}$ の ε-近傍 $(\varepsilon \geq 0)$ を $N(p, \varepsilon)$ で表し, 部分集合 $P \subset G_{\nabla}^{\triangle}$ の ε-近傍を $N(P, \varepsilon)$ で表す; $N(p, \varepsilon) = \{\, q \in G_{\nabla}^{\triangle} \mid d_{\nabla}^{\triangle}(p, q) \leq \varepsilon \,\}$, $N(P, \varepsilon) = \bigcup_{p \in P} N(p, \varepsilon)$.

$V_n = \{\, [K] \in \mathcal{K}_{\nabla} \mid a_2(K) = n \,\}$ とおく.

補題 5.1. $a_2(K) = n$ を満たす $\forall [K] \in \mathcal{K}_{\nabla}$ に対して, 次が成り立つ.

$$N([K], 3) \supset N(V_n, 1)\,.$$

証明. $N(V_n, 1)$ は, 頂点集合を $V_{n-1} \cup V_n \cup V_{n+1}$ とし, 辺集合はこれらの頂点を結ぶ $G_{\nabla}^{\triangle}$ 内の辺全体から成る部分グラフである. 補題 4.3 より, $\forall v_n \neq [K] \in V_n$ に対して $d_{\nabla}^{\triangle}([K], v_n) = 2$ が成り立ち, 又, $\forall v_{n\pm1} \in V_{n\pm1}$ に対して $d_{\nabla}^{\triangle}([K], v_{n\pm1}) \leq 3$ が成り立つ. よって, $N([K], 3) \supset N(V_n, 1)$. □

定理 2.2 の証明. T を 3 辺 $s(x, y)$, $s(y, z)$, $s(z, x)$ から成る $G_{\nabla}^{\triangle}$ 内の測地三角形とする. 以下で, T が 3-slim であることを示す. ここでは, x, y, z が $G_{\nabla}^{\triangle}$ の頂点である (i.e. $x, y, z \in \mathcal{K}_{\nabla}$) と仮定して証明を進める. (そうでない場合も同様に証明できる.) $x = [K]$, $y = [J]$, $z = [L]$ とおく. $a_2(K) \leq a_2(J) \leq a_2(L)$ であると仮定してよい. $k = a_2(J) - a_2(K)$, $k' = a_2(L) - a_2(J)$ とする.

$$s(x, y) = \overline{x_0 x_1} \cup \overline{x_1 x_2} \cup \cdots \cup \overline{x_{p-1} x_p},$$
$$s(y, z) = \overline{y_0 y_1} \cup \overline{y_1 y_2} \cup \cdots \cup \overline{y_{q-1} y_q},$$
$$s(z, x) = \overline{z_0 z_1} \cup \overline{z_1 z_2} \cup \cdots \cup \overline{z_{r-1} z_r},$$

とする. $(x_0, \ldots, x_p, y_0, \ldots, y_q, z_0, \ldots, z_r \in \mathcal{K}_{\nabla}$, $x_0 = x = z_r$, $y_0 = y = x_p$, $z_0 = z = y_q$.)

本稿では, $k, k' \geq 2$ の場合の証明のみを与える (その他の場合も同様に証明できる. cf. [9]). 今, $k, k' \geq 2$ とする. 補題 4.3 より, $p = k$, $q = k'$, $r = k + k'$ が成り立つ. (Figure 6 は測地三角形 T の一例である.) 補題 5.1 より, 各 $j = 1, \cdots, q-1$ に対して

$$N(y_j, 3) \supset \overline{z_{q-j+1} z_{q-j}}\,,\, \overline{z_{q-j} z_{q-j-1}}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} N(s(y, z), 3) &\supset N(y_1 \cup \cdots \cup y_{q-1}, 3) \\ &\supset \overline{z_q z_{q-1}} \cup \cdots \cup \overline{z_1 z_0}. \end{aligned}$$

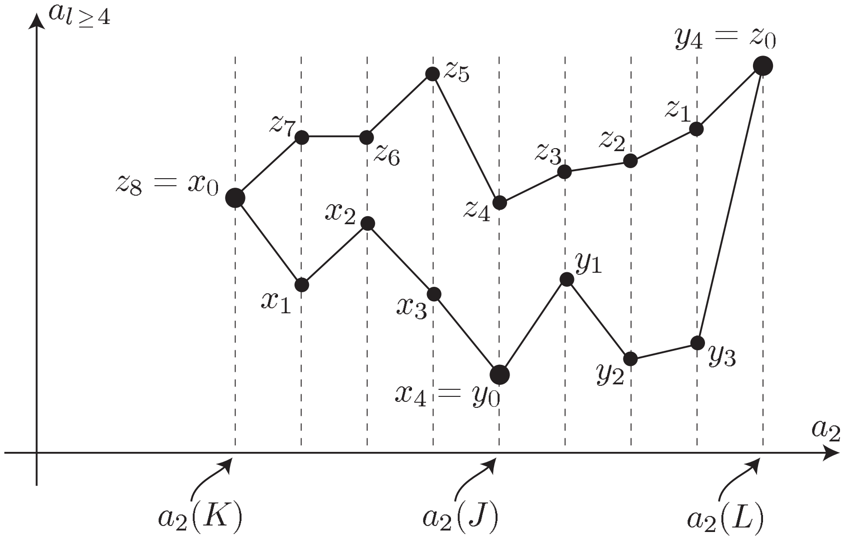


FIGURE 6. $p = q = 4$ の場合の一例. 各頂点は Conway 多項式の係数に着目してプロットされている.

同様に

$$\begin{aligned} N(s(x,y),3) &\supset N(x_1 \cup \cdots \cup x_{p-1}, 3) \\ &\supset \overline{z_r z_{r-1}} \cup \cdots \cup \overline{z_{q+1} z_q}. \end{aligned}$$

よって, $N(s(x,y) \cup s(y,z), 3) \supset s(z,x)$. 残りの2つの示すべき条件 $N(s(y,z) \cup s(z,x), 3) \supset s(x,y)$ と $N(s(z,x) \cup s(x,y), 3) \supset s(y,z)$ も同様に示すことができる. 以上より, T は3-slim である. □

6. 補足

ここでは, 関連するいくつかの事実と問題を紹介する.

まずはじめに, (∇, Δ)-Gordian 複体 $\mathcal{G}^{\Delta}_{\nabla}$ について考える. 補題 4.3 より, $\mathcal{G}^{\Delta}_{\nabla}$ は 2–単体を含まないことがわかる (cf. [15, Proposition 2.3]). これより次の命題が成り立つ.

命題 6.1. (∇, Δ)-Gordian 複体は 1 次元複体である.

よって, $\mathcal{G}^{\Delta}_{\nabla}$ と G^{Δ}_{∇} は一致することがわかるので, 定理 2.2 は $\mathcal{G}^{\Delta}_{\nabla}$ も Gromov 双曲的であることを意味する. さらに次の命題が成り立つ.

命題 6.2. G^{Δ}_{∇} は実数直線 $\mathbb{R}$ に擬等長である.

証明. $f : G^{\Delta}_{\nabla} \to \mathbb{R}$ を次で定義される写像とする; $v_{n-1} \in V_{n-1}$, $v_n \in V_n$ に対して $f(\overline{v_{n-1}v_n}) = [n-1, n]$. ここで $[n-1, n]$ は $n-1$ から n までの閉区間を表す. このとき, 補題 4.3 より写像 f は擬等長写像となることがわかる. □

命題 6.2 は, 浅岡正幸氏と松田能文氏から, 2009 年 8 月にトポロジーシンポジウムでの講演後にご指摘頂いたもので, 本研究集会で蒲谷祐一氏によってもご指摘頂いた.

次に, (∇, x)-Gordian 複体 $\mathcal{G}^{\mathrm{x}}_{\nabla}$ と (∇, x)-Gordian グラフ G^{x}_{∇} について考える. 任意の結び目の Alexander 多項式は, 結び目解消数 1 の結び目で実現できる [11], [17, 18] ことから, $\forall [K] \in \mathcal{K}_{\nabla}$ は結び目解消数 1 の結び目を含む. これより, $\mathcal{G}^{\mathrm{x}}_{\nabla}$ と G^{x}_{∇} の直径は 2 以下になることがわかる. 直径が有限な測地空間は Gromov 双曲的 (実際に直径が r であるとすると, r-双曲的) になることから, 直ちに次の命題を得る.

命題 6.3. G^{x}_{∇} は Gromov 双曲的である.

上で述べたように, G^{x}_{∇} の直径の有限性は, 自明結び目 U を含む頂点 $[U]$ が他の全ての頂点と繋がっていることから導かれる. このことから, 次の問が考えられる: G^{x}_{∇} から頂点 $[U]$ と, $[U]$ に接する辺を除いたグラフ G' を考えるとき, それの直径は有限か? この問の答えは次のとおりである.

命題 6.4. G' の直径は 2 以下である.

証明. $d^{\mathrm{x}}(K, K') = 2$ である $\forall K, K' \in \mathcal{K}$ に対して, 次を満たす無限個の結び目 $J_1, J_2, \ldots$ が存在する [1]: 任意の $i \neq k$ に対して, $d^{\mathrm{x}}(K, J_i) = d^{\mathrm{x}}(K', J_i) = 1$, $\nabla_{J_i} \neq \nabla_{J_k}$. よって, G^{x}_{∇} 内で距離が 2 の頂点の組は, G' 内でも距離が 2 であることがわかる. □

命題 6.4 は, 大山淑之先生から, 2009 年 10 月に東京女子大学でセミナーを行った際にご指摘頂いた.

注意 6.5. G^{x}_{∇} 内で距離が 2 の頂点の組を結ぶ G' 内の長さ 2 の道は無限個存在することもわかる.

注意 6.6. 任意の自然数 n に対して, $d^{\Delta}_{\nabla}([K], [K']) = n$ を満たす $[K], [K']$ が存在する. (実際, Figure 4 のツイスト結び目を用いればよい.) よって, G^{Δ}_{∇} の直径は無限である.

又, Kawauchi [10] によって $d^{\mathrm{x}}_{\nabla}([3_1], [4_1]) = 2$ であることが証明された. これに上で述べたことを合わせると, G^{x}_{∇} の直径が実際に 2 であることがわかる. さらに, Kawauchi は $(\nabla, \times)$-Gordian 複体 $\mathcal{G}^{\mathrm{x}}_{\nabla}$ が無限次元複体であることも証明している [10], 即ち, 任意の自然数 n に対して $\mathcal{G}^{\mathrm{x}}_{\nabla}$ に含まれる n–単体が存在する.

注意 6.7. Gordian 複体 $\mathcal{G}^{\mathrm{x}}$ も無限次元複体である [8]. 又, $n \geq 3$ に対して, C_n-Gordian 複体 $\mathcal{G}^{C_n}$ も無限次元複体である [15]. ここで, C_1-変形とは交差交換のことであり, C_2-変形は Delta-変形と同値であることを注意しておく.

様々な結び目不変量と局所変形に対して, それらを用いて定義されるグラフの Gromov 双曲性を考える問題は, 現段階では本稿で紹介した 2 つの例以外は知られていない. 特に, 次の問は興味のある問題のひとつである.

問 6.8. G^{Δ} は Gromov 双曲的か ?

References

1. S. Baader, *Note on crossing changes*, Quart. J. Math. **57** (2006), 139–142.
2. M. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
3. J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967) (1970), 329–358.
4. J.-M. Gambaudo and É. Ghys, *Braids and signatures*, Bull. Soc. Math. France **133** (2005), no. 4, 541–579.
5. M. N. Goussarov, *Knotted graphs and a geometrical technique of n-equivalences*, POMI Sankt Petersburg preprint, circa (1995), (in Russian).
6. M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ, vol. 8, pp. 75–263, Springer, New York, 1987.
7. K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. **4** (2000), 1–83.
8. M. Hirasawa and Y. Uchida, *The Gordian complex of knots*, J. Knot Theory Ramifications **11** (2002), no. 3, 363–368.
9. K. Ichihara and In Dae Jong, *Gromov hyperbolicity and a variation of the Gordian complex*, arXiv:0912.0990v1 (2009).
10. A. Kawauchi, *On the Alexander polynomials of knots with Gordian distance one*, preprint (2009).
11. H. Kondo, *Knots of unknotting number* 1 *and their Alexander polynomials*, Osaka J. Math. **16** (1979), no. 2, 551–559.
12. S. G. Matveev, *Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology spheres*, Mat. Zametki **42** (1987), no. 2, 268–278.
13. H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), no. 1, 75–89.
14. Y. Nakanishi and Y. Ohyama, *Local moves and Gordian complexes*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), no. 9, 1215–1224.
15. Y. Ohyama, *The C_k-Gordian complex of knots*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), 73–80.
16. M. Okada, *Delta-unknotting operation and the second coefficient of the Conway polynomial*, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), no. 4, 713–717.
17. T. Sakai, *A remark on the Alexander polynomials of knots*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **5** (1977), no. 3, 451–456.
18. ______, *Polynomials of invertible knots*, Math. Ann. **266** (1983), no. 2, 229–232.
19. Y. Tsutsumi and H. Yamada, *Variation of the Alexander-Conway polynomial under Dehn surgery*, Topology **43** (2004), no. 4, 893–901.
20. H. Yamada, *C_2, C_3 and C_4-moves and the coefficient of the Conway polynomial for knots*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), no. 7, 867–872.

〒 630-8528 奈良市高畑町 奈良教育大学教育学部数学教育講座

E-mail address: `ichihara@nara-edu.ac.jp`

URL: `http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~ichihara/index.html`

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻

E-mail address: `jong@sci.osaka-cu.ac.jp`

URL: `http://www.ex.media.osaka-cu.ac.jp/~d07sa009/index.html`

寄り道交差交換 (Detour crossing change)

内田 吉昭 (神戸薬科大学薬学部)

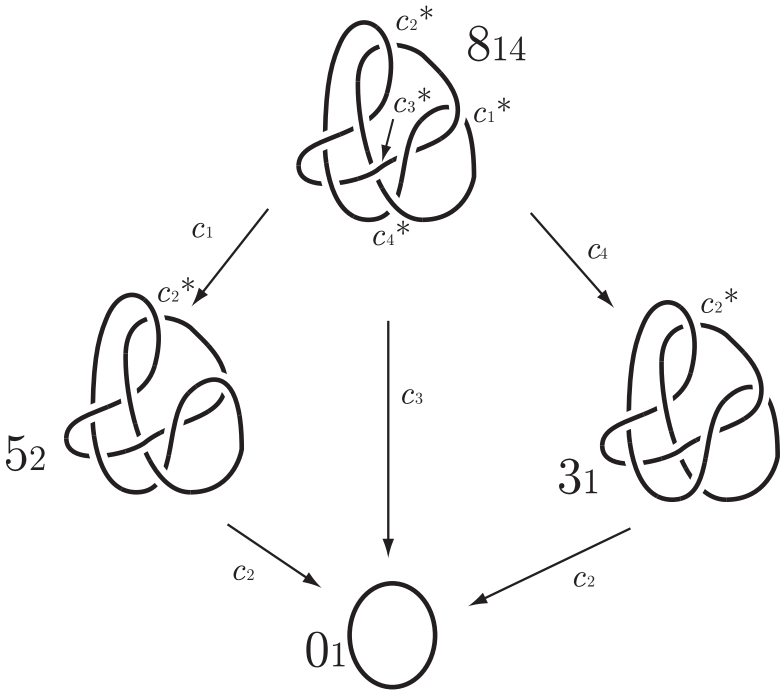


図 1: 寄り道交差交換

結び目 8_{14} は結び目解消操作数 1 の結び目である．図 1 からわかるように結び目 5_2 や 3_1 を経由して 2 回の交差交換でも解くことができる．このようにある交差交換 c を 2 回の交差交換 c_1，c_2 で実現することを寄り道交差交換と呼ぶ．任意の交差交換 c に対して寄り道交差交換は可算無限個あることを示し，それらの分類を考える．

定義 [交差交換] 結び目 k のダイアグラム D_k をその交差点 c^* で交差交換を行ってできたダイアグラムを $c(D_k)$，そのダイアグラムがあらわす結び目を $c(k)$ であらわす．また 2 つの交差点 c_1^*，c_2^* に対して c_1^*, c_2^* の順にダイアグラム D_k に対して交差交換を行って得られるダイアグラムを $c_2(c_1(D_k))$，そのダイアグラムが表す結び目を $c_2(c_1(k))$ で表し，この 2 つの交差交換の順序つき対を (c_1, c_2) で表す．

注意 $c_2(c_1(k)) \cong c_1(c_2(k))$ であるが，一般に $c_1(k) \not\cong c_2(k)$ である．たとえば図 1 で c_3 の寄り道交差交換として (c_1, c_2) がとれるが c_1 と c_2 の順序を入れ替えると途中に出てくる結び目 $c_2(8_{14})$ は 8 の字結び目となる．

定義 [寄り道交差交換] 結び目 k のダイアグラム D_k の交差点 c^* での交差交換 c が

$k \not\cong c(k)$ のとき，c の**寄り道交差交換**とは，あるダイアグラム D'_k が存在して，2 つの交差点 c_1^*，c_2^* での交差交換 (c_1, c_2) で $c_2(c_1(k)) = c(k)$ となるものである．

背景 いくつかの研究の中で寄り道交差交換の例となるものがあるので，その例を挙げておく．M. Hirasawa と著者により，Gordian 距離 1 の結び目 k，k' に対して任意有限個の結び目の集合 $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ が存在して，集合 $\{k, k', k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ の結び目は互いに Gordian 距離が 1 となることを証明した [4]．これらの集合は，k を k' に変形する交差交換の寄り道交差交換の途中の結び目になり，寄り道交差交換を構成できる．

また，K. Taniyama は互いの Gordian 距離が 1 となる結び目の集合 $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ に対して，これらの結び目と Gordian 距離が 1 となる結び目 k が存在することを証明した [1]．このとき結び目 k は k_i を k_j $(i \neq j)$ に変形する交差交換の寄り道交差交換の途中の結び目になっている．

S. Baader は Gordian 距離 2 の結び目の対 k_1，k_2 に対して，k_1 と k_2 との距離が 1 となる結び目 k が可算無限個存在することを証明した [2, 3]．また，結び目 k の Vassiliev 不変量についても考察をしている．その構成方法は k_1 と k_2 の Gordian 距離が 1 の場合でも有効であり，その方法により，k_1 から k_2 へ変形する交差交換の寄り道交差交換が構成できる．

Y. Ohyama-S. Horiuchi の Baader の成果を拡張した結果 (2009 年神戸トポロジーセミナーでの講演) からも，寄り道交差交換を構成できる．

定義 [同値な寄り道交差交換] 結び目 k の交差交換 c の 2 つの寄り道交差交換 (c_1, c_2)，(c'_1, c'_2) が同値とは $c_1(k) \cong c'_1(k)$ をみたすこと．

途中にあらわれる結び目が同じであるとき，2 つの寄り道交差交換が同値とみなす．図 1 の 2 つの寄り道交差交換は寄り道して得られる結び目が異なるので異なる寄り道交差交換である．

定義 [自明な寄り道交差交換] 結び目 k の交差交換 c の寄り道交差交換 (c_1, c_2) が**自明**とは $\{c_1(k), c_2(k)\} \cap \{k, c(k)\} \neq \emptyset$ となること．

すなわち，2 つの交差点 c_1^*，c_2^* での交差交換で得られる 2 つの結び目 1 つが k または $c(k)$ と同値となるとき自明と呼ぶ．このとき，交差交換 c_1，c_2 のどちらかは結び目を変えない．

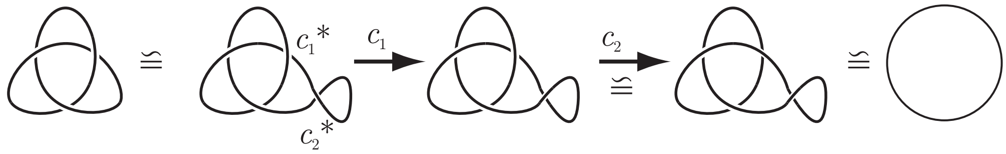


図 2: 自明な寄り道交差交換

自明な交差交換の例

c の寄り道交差交換 (c_1, c_2) でライデマイスター変形 I を行ってそこで交差交換を付け加えただけのもの (図 2) は $c_1(k) \cong c(k)$ となるので自明な寄り道交差交換である．

また，背景のところの例はすべて自明な交差交換となる．

定理 任意の結び目 k と交差交換 c で $k \not\cong c(k)$ となるものに対して，自明でない寄り道交差交換 (c_1, c_2) が可算無限個存在する．

証明 結び目 k のダイアグラム D_k の交差点 c^* での交差交換 c を図 3 のようにとって一般性を失わない．

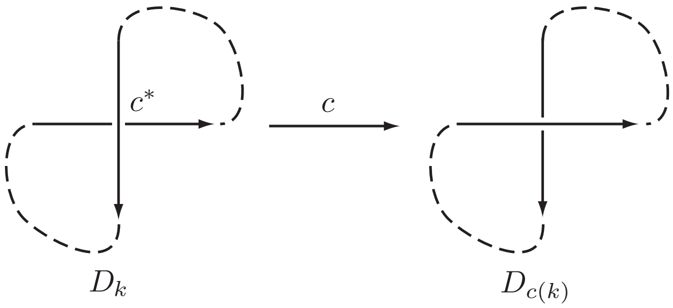


図 3: 交差交換 c

交差点 c^* の周りを図 4 のように変形して，2 つの交差点 $c^*_{m,1}$ と $c^*_{m,2}$ をとる．

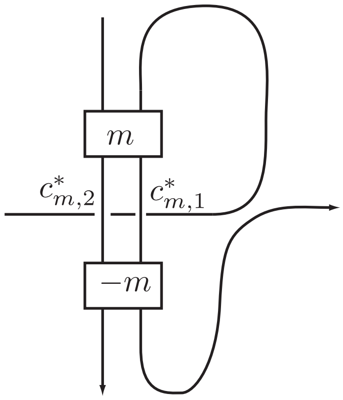
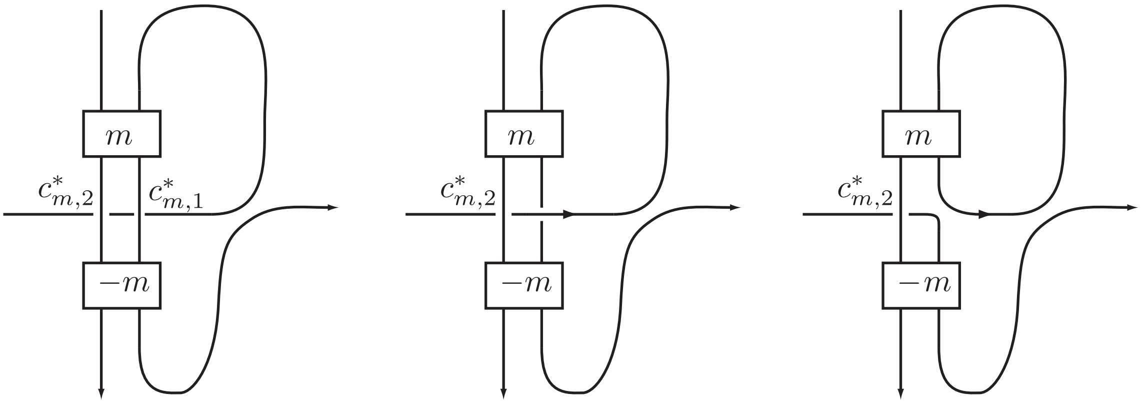


図 4: 寄り道交差交換 $(c_{m,1}, c_{m,2})$

ここで $\boxed{m}$ は m-full twist を表す．すると，各整数 m に対して $(c_{m,1}, c_{m,2})$ は c の寄り道交差交換になる．

主張 $n \neq m$ のとき，$(c_{m,1}, c_{m,2})$ と $(c_{n,1}, c_{n,2})$ が同値でないことと，高々2 個の m を除いて $(c_{m,1}, c_{m,2})$ は自明でない交差交換であることを示す．

はじめに，$c_{m,1}(k)$ の Conway 多項式の 2 次の係数 $a_2(c_{m,1}(k))$ を求める．



k $\qquad$ $c_{m,1}(k)$ $\qquad$ $k_{m,0}$

図 5: スケイン関係式

図 5 のように k，$c_{m,1}(k)$，$k_{m,0}$ を定義すると，Conway 多項式の skein relation より

$$\nabla_k(z) - \nabla_{c_{m,1}(k)}(z) = z\nabla_{k_{m,0}}(z)$$

を得る．$k_{m,0}$ は 2-component link より Conway 多項式の 1 次の係数は linking number と等しいので m である．結び目 k に対して Conway 多項式の 2 次の係数を $a_2(k)$ で表すと，

$$a_2(k) - a_2(c_{m,1}(k)) = mz$$

となる．よって $a_2(c_{m,1}(k)) = a_2(k) - mz$ となり $a_2(c_{m,1}(k)) \ncong a_2(c_{n,1}(k))$ $(n \neq m)$ が得られる．よって，$c_{m,1}(k) \ncong c_{n,1}(k)$ $(n \neq m)$ であり，$n \neq m$ のとき，$(c_{m,1}, c_{m,2})$ と $(c_{n,1}, c_{n,2})$ は同値でない．

自明でないことの証明．$\{c_{m,1}(k), c_{m,2}(k)\} \cap \{k, c(k)\} = \emptyset$ を示せばよい．

$c_{0,1}(k) \cong c(k)$ より $c_{m,1}(k) \ncong c(k)$ $(m \neq 0)$ である．また，$a_2(c_{m,1}(k)) = a_2(k) - mz \neq a_2(k)$ $(m \neq 0)$ より $c_{m,1}(k) \ncong k$ を得る．

高々2 つの m を除いて，$c_{m,2}(k) \ncong k$，$c_{m,2}(k) \ncong c(k)$ となることを示す．

図 6 のように skein relation をとる．$k'_{m,0}$ は 2-component link より Conway 多項式の 1 次の係数はある定数 α を使って

$$a_1(k'_{m,0}) = \alpha - m$$

となる．よって $a_2(k) - a_2(c_{m,2}(k)) = a_1(k'_{m,0})z = (\alpha - m)z$ より $a_2(c_{m,2}(k)) = a_2(k) - (\alpha - m)z$．したがって，$m \neq \alpha$ のとき，$c_{m,2}(k) \ncong k$.

また，$c_{0,2}(k) \cong c(k)$ より，$a_2(c(k)) = a_2(k) - \alpha z$ となるので，$a_2(c_{m,2}(k)) = a_2(c(k)) + mz$．よって，$m \neq 0$ に対して $c_{m,2}(k) \ncong c(k)$.

以上より $m \neq 0,\ \alpha$ に対して $(c_{m,1}, c_{m,2})$ は自明でない寄り道交差交換であり，$n \neq m$ のとき $(c_{m,1}, c_{m,2}) \ncong (c_{n,1}, c_{n,2})$ となる．

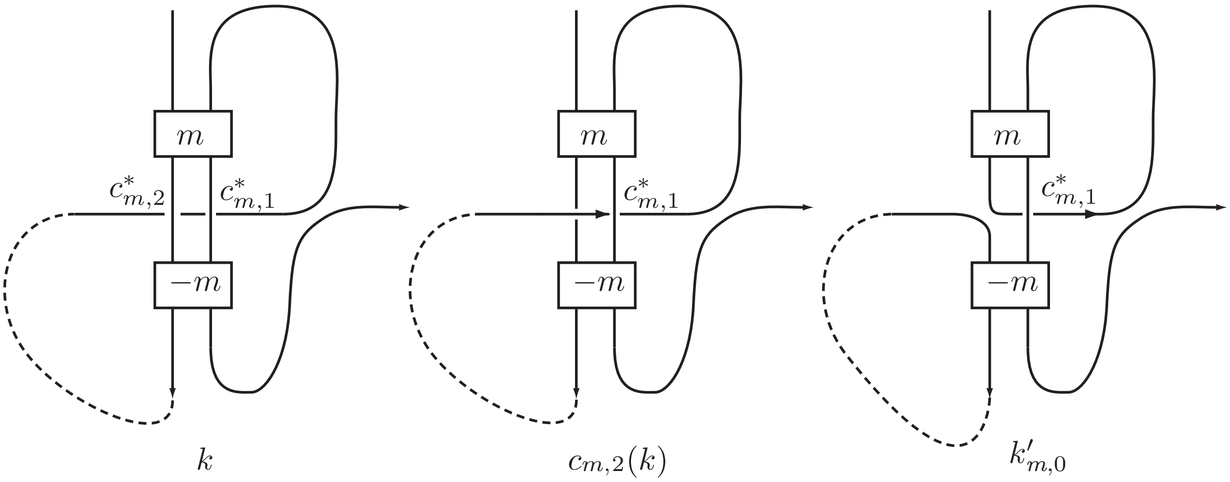


図 6: スケイン関係式 2

定義 結び目 k とある交差点 c^* と交差交換 c の寄り道交差交換 (c_1, c_2) に対して図 7 のような 2 つの交差点 c_1^*，c_2^* を含む 2-string tangle が存在するとき (c_1, c_2) を (c の) 局所的な寄り道交差交換と呼ぶ.

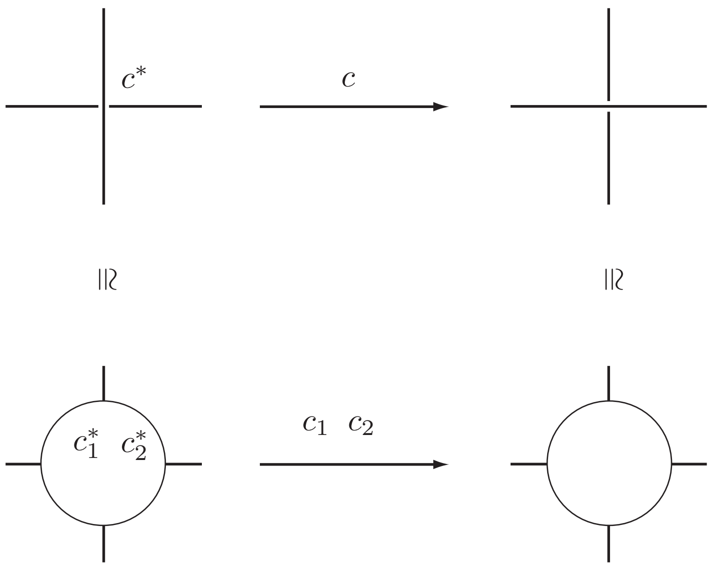


図 7: 局所的交差交換

注意 定理の $(c_{m,1}, c_{m,2})$ は c の局所的な寄り道交差交換である.

Problem 結び目とある交差点 c に対して自明でない，局所的でない寄り道解消操作は無限個存在するか．特に，doubled knot を解く交差点 c に対して自明でない，局所的でない寄り道解消操作は無限個存在するか.

参考文献

[1] 谷山 公規, *On the structure of the Gordian complex of knots*, 第54回トポロジーシンポジウム報告集 (2007), 1–8.

[2] S. Baader, *Note on crossing changes*, Q. J. Math. **57** (2006), 139–142.

[3] S. Baader, *Gordian distance and Vassiliev invariants* arXiv:math/0703786

[4] M. Hirasawa and Y. Uchida, *The Gordian complex of knots*, Jour. Knot Theory Ramifications, **11** (2002), no.3, 363-368.

On Intrinsically Knotted or Completely 3-Linked Graphs

花木 良*，新國 亮†，谷山 公規‡，山崎 晶子§

1　はじめに

有限グラフを G とし，自然に位相空間と考えます．G から 3 次元球面への埋め込みを，G **の空間埋め込み**〔spatial embedding〕といい，その像を**空間グラフ**〔spatial graph〕といいます．G が**絡み目内在**〔intrinsically linked〕（IL）であるとは，G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非分離 2 成分絡み目を含むときをいいます．G が**結び目内在**〔intrinsically knotted〕（IK）であるとは，G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非自明な結び目を含むときをいいます．G が **3 成分絡み目内在**〔intrinsically 3-linked〕（I3L）であるとは，G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非分離 3 成分絡み目を含むときをいいます．どのようなグラフがこのような性質をもつのかということが，研究の主な目的です．絡み目内在（結び目内在，3 成分絡み目内在）でないグラフのマイナーは，同様に絡み目内在（結び目内在，3 成分絡み目内在）でないことがわかります．ここで，G' が G の**マイナー**〔minor〕であるとは，G から部分グラフをとる操作と辺を縮約するという操作で G' が得られるときをいいます．これらの性質をもつグラフとして，次が知られています．

定理 1 [8, 1] 6 頂点完全グラフ K_6 は絡み目内在である．ここで，完全グラフとは，どの 2 頂点も 1 本の辺で結ばれているグラフである．

5 頂点完全グラフは絡み目内在でないことがわかるので，6 頂点完全グラフは絡み目内在である最小の完全グラフです．

定理 2 [1] 7 頂点完全グラフ K_7 は結び目内在である．

*早稲田大学大学院教育学研究科
†東京女子大学現代教養学部
‡早稲田大学教育学部
§東京女子大学大学院理学研究科

図1の空間埋め込みから，6頂点完全グラフは結び目内在でないことがわかるので，7頂点完全グラフは結び目内在である最小の完全グラフです．

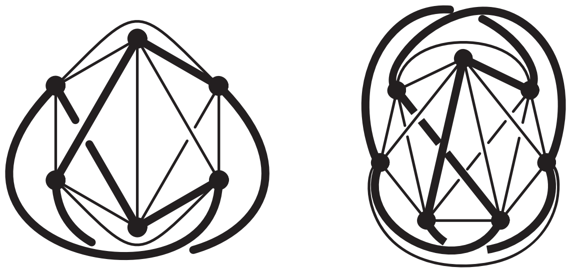


図 1: 絡み目内在と結び目内在

定理 3 [3] 10頂点完全グラフ K_{10} は3成分絡み目内在である．

また，Flapan，Naimi と Pommersheim は，9頂点完全グラフは3成分絡み目内在でないことを示しました．

これらの性質をもつグラフを探るのに，次のグラフの変形が知られています．以下，グラフの**サイクル**とは円周に同相な部分グラフのことをいい，特に k 本の辺から成るサイクルを k**-サイクル**といいます．**ΔY 変形**とは，グラフの3-サイクルの辺を取り除き，新しい頂点を1つ加えその頂点とそのサイクルの各頂点を辺で結ぶ変形です（図2）．この変形の逆を **YΔ 変形**といいます．次の事実が成り立ちます．

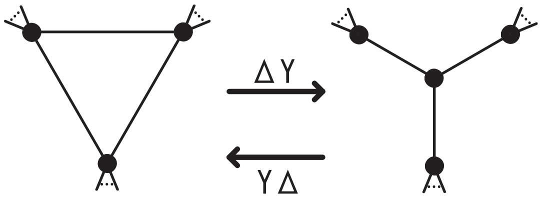


図 2: ΔY 変形と YΔ 変形

命題 4 G' を G から ΔY 変形で得られたグラフとすると，次が成り立つ．G が絡み目内在ならば，G' も絡み目内在である．G が結び目内在ならば，G' も結び目内在である．G が3成分絡み目内在ならば，G' も3成分絡み目内在である．すなわち，ΔY 変形は，絡み目内在，結び目内在，3成分絡み目内在という性質を保存する．

絡み目内在のグラフの特徴づけがなされています．

定理 5 [7] G が絡み目内在であるための必要十分条件は，G が K_6 から ΔY 変形と YΔ 変形して得られるグラフをマイナーとして含むことである．

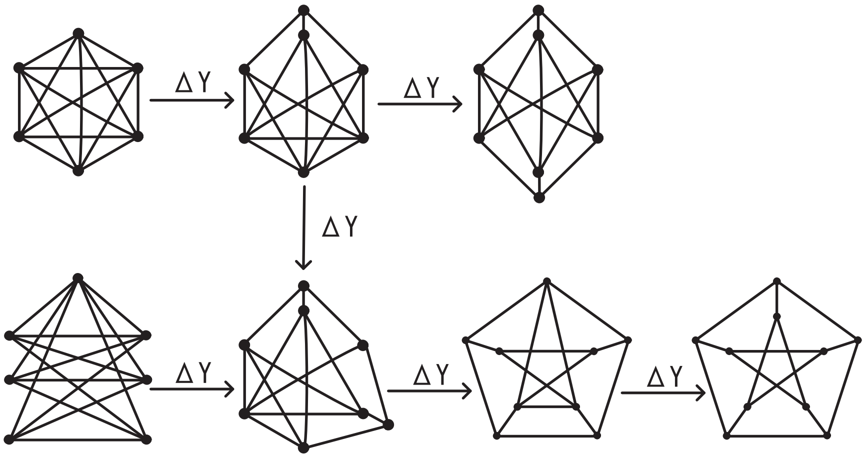


図 3: ペテルセンファミリー

ここで，K_6 から ΔY 変形と YΔ 変形して得られるグラフの集合を**ペテルセンファミリー〔Petersen family〕**といいます．さらに次の系が成り立ちます．

系 6 [7] G を絡み目内在なグラフ，G' を G から YΔ 変形で得られたグラフとすると，G' も絡み目内在である．すなわち，YΔ 変形は，絡み目内在という性質を保存する

一方，結び目内在については，次の事実が知られています．

定理 7 [2] YΔ 変形はグラフの結び目内在という性質を保存するとは限らない．

実際，Flapan と Naimi は，K_7 から適当な 6 回の ΔY 変形で得られる結び目内在なグラフ C_{12} から, 適当な 2 回の YΔ 変形を 2 回行なって得られるグラフ FN が結び目内在でないことを示しました．
定理 5 より絡み目内在である K_6 から ΔY 変形と YΔ 変形をして得られるグラフは全部で 6 個です．結び目内在である K_7 から ΔY 変形をして得られるグラフについて，次のことが知られています．

定理 8 [6] 13 個のグラフが K_7 から ΔY 変形して得られる．さらに，これらのグラフは結び目内在に関してマイナーミニマルである．つまり，これらのグラフのプロパーマイナーは結び目内在ではない．ここで，G' が G のプロパーマイナーであるとは，G' は G のマイナーで G とは一致しないときをいう．

そして，今回，次の問題を考えます．

問題 1 K_7 から 6 回の ΔY 変形と 2 回の YΔ 変形で FN を得る際の FN の一つ前のグラフ N'_{11}（すなわち，K_7 から 6 回の ΔY 変形と 1 回の YΔ 変形で得られるもの）は，結び目内在であるか？

問題 2 K_7 から ΔY 変形と YΔ 変形をして得られるグラフは，何個あるか？さらに，これらの各グラフは結び目内在であるか？

質疑応答時に寺垣内政一先生から頂いたコメントによれば，Flapan と Naimi は N'_{11} が結び目内在でないこともわかっていたようですが，そのことは [2] では全く触れられていません．今回，我々はより一般に問題 2 に対して完全な解答を与えます．

2　得られた結果

得られた結果を紹介するために，新たに次を定義します．G が**結び目または完全 3 成分絡み目内在〔intrinsically knotted or completely 3-linked〕（I(K or C3L)）**であるとは，G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非自明な結び目を含むか各 2 成分部分絡み目が非分離である 3 成分絡み目を含むときをいいます．定義から，G が結び目内在ならば G は結び目または完全 3 成分絡み目内在であることがわかります．問題 1 と 2 の答えとして，次の主定理と系を得ました．

定理 9 19 個のグラフが K_7 から ΔY 変形と YΔ 変形で得られ，それらのグラフは結び目または完全 3 成分絡み目内在である．さらに，これらのグラフは結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルである．

これらのグラフの分布は図 4 のようになっています．破線で囲まれた領域にあるグラフは，K_7 と K_7 から ΔY 変形のみで得られるグラフで，結び目内在です．FN は，Flapan と Naimi が結び目内在ではないことを示したグラフです．

N_9 は図 5 のような空間埋め込みをもつ（左の空間埋め込みは非分離な 3 成分絡み目を含まない，右の空間埋め込みは非自明な結び目を含まない）ので，N_9 は結び目内在でも完全 3 成分絡み目内在でもないことがわかります．一般に，次が成り立ちます．

系 10 $N_9, N_{10}, N_{11}, N'_{11}, N_{12}$ と FN の各グラフは結び目内在でも完全 3 成分絡み目内在でもない．すなわち，G を K_7 から ΔY 変形と YΔ 変形して得られるが ΔY 変形のみでは得られないグラフとすると，G は結び目内在ではない．

定理 9 の前半の証明は，次が成り立つので，N_9 と FN が結び目または完全 3 成分絡み目内在であることを示せば十分です．

命題 11 G' を G から ΔY 変形して得られるグラフとする．G が結び目または完全 3 成分絡み目内在であるなら，G' も結び目または完全 3 成分絡み目内在である．

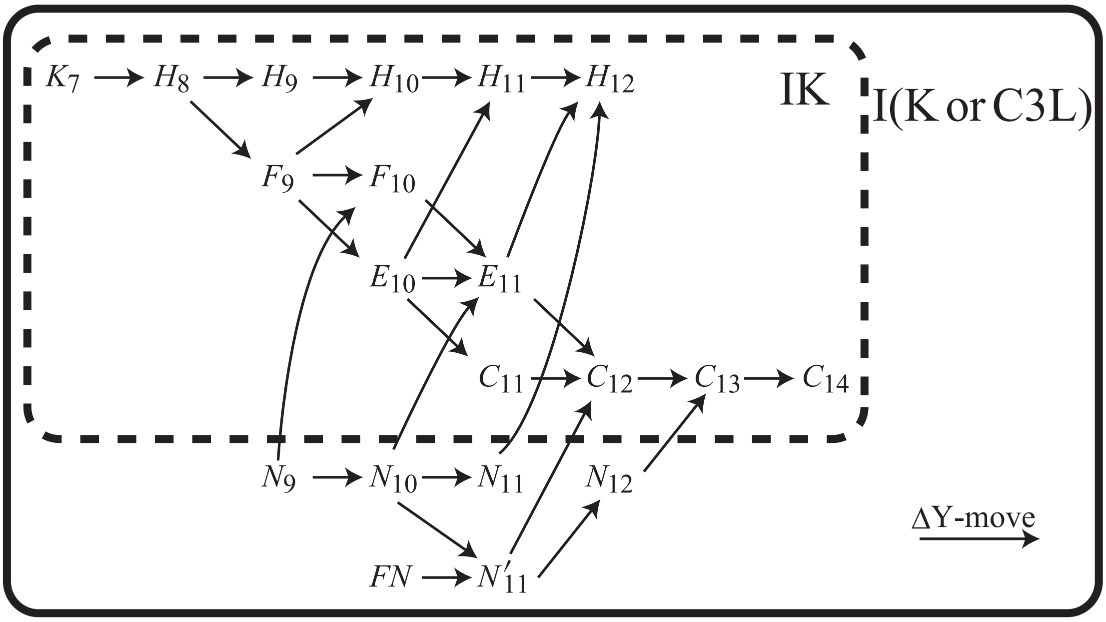


図 4: K_7 から ΔY 変形と YΔ 変形して得られるグラフ

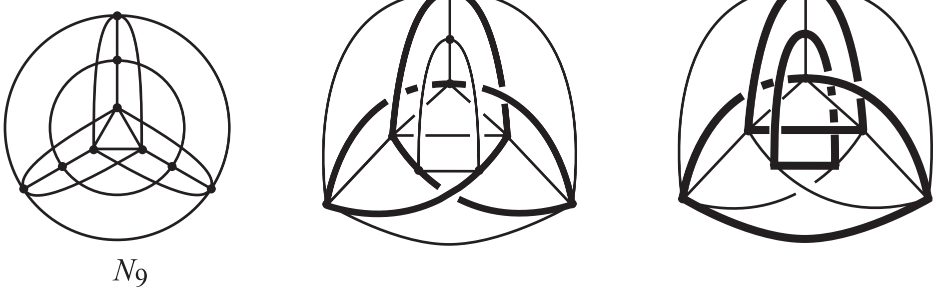


図 5: N_9 とその空間埋め込み

N_9 と FN が結び目または完全 3 成分絡み目内在であることを示すのに，次の補題を使います．

補題 12 [9, 4] D_4 を図 6 のグラフとし，D_4 の 2-サイクル $e_i \cup e_j$ を γ_{ij} で表す ($i < j$)．また，D_4 の全ての 4-サイクルの集合を Γ で表す．このとき，

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod 2 \Longleftrightarrow \mathrm{lk}_2(f(\gamma_{12} \cup \gamma_{56}))\mathrm{lk}_2(f(\gamma_{34} \cup \gamma_{78})) = 1$$

である．ここで，a_2 は $Conway$ 多項式の 2 次の係数，lk_2 は 2 を法とした絡み数である．

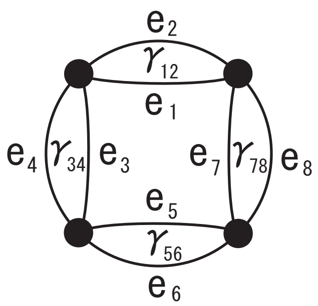


図 6: D_4

そして，詳細は省きますが，N_9 と FN のマイナーである絡み目内在グラフに着目をし，補題 12 を用いて，まず非自明な結び目を探していきます．そこで，非自明な結び目が含まれないような状況下では，必ずどの 2 成分部分絡み目も非分離であるような 3 成分絡み目が見つかることを示します．これらのグラフが結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルであることは，次の補題を用います．

補題 13 G を結び目または完全 3 成分絡み目内在なグラフとする．G' を G から ΔY 変形で得られるグラフとする．G' が結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルであるならば，G も結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルである．

この補題と図 4 の H_{12} と C_{13} が定理 8 より結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してもマイナーミニマルであることから，$N_9, N_{10}, N_{11}, N'_{11}, N_{12}$ と FN も結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルであることがわかります．

3　関連する話題

結び目または完全 3 成分絡み目内在と同じような定義として，次が知られています．G が**結び目または 3 成分絡み目内在〔intrinsically knotted or 3-linked〕（I(K or 3L)）**である [5] とは，G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非自明な結び目を含むか非分離である 3 成分絡み目を含むときをいいます．[5, 10, 11] で，結び目または 3 成分絡み目内在であるが結び目内在でも 3 成分絡み目でもないグラフの存在が知られています．ΔY 変形と YΔ 変形については，以下が知られています．

命題 14 G' を G からして得られるグラフとする．G が結び目または 3 成分絡み目内在であるなら，G' も結び目または 3 成分絡み目内在である．

命題 15 [10] YΔ 変形はグラフの結び目または 3 成分絡み目内在という性質を保存するとは限らない

そして，内在性質と ΔY 変形と YΔ 変形について，表にまとめると，以下のようになります．

内在性質	ΔY 変形	YΔ 変形
絡み目	保存する	保存する [7]
結び目	保存する	保存しない [2]
3 成分絡み目	保存する	わかっていない
結び目または 3 成分絡み目	保存する	保存しない [10]
結び目または完全 3 成分絡み目	保存する	わかっていない

参考文献

[1] J.H. Conway and C.McA. Gordon: Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 445–453.

[2] E. Flapan and R. Naimi: The Y-triangle move does not preserve intrinsic knottedness, *Osaka J. Math.*, **45** (2008), 107–111.

[3] E. Flapan, R. Naimi and J. Pommersheim: Intrinsically triple linked complete graphs, *Topology Appl.*, **115** (2001), 239–246.

[4] J. Foisy: Intrinsically knotted graphs, *J. Graph Theory* **39** (2002), 178–187.

[5] J. Foisy: Graphs with a knot or 3-component link in every spatial embedding, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2006), 1113–1118.

[6] T. Kohara and S. Suzuki: Some remarks on knots and links in spatial graphs, in *Knots 90 (Osaka, 1990)* (de Gruyter, Berlin, 1992), 435–445.

[7] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas: Sachs' Iinkless embedding conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 185–227.

[8] H. Sachs: On spatial representations offinite graphs, in *Finite and Infinite sets, Vol. I, II (Eger, 1981), Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai* 37, North-Holland, Amsterdam, 1984, 649-662.

[9] K. Taniyama and A. Yasuhara: Realization of knots and links in a spatial graph, *Topology Appl.* **112** (2001), 87–109.

[10] A. Yamazaki: Some intrinsic properties for various graphs, Master thesis, Tokyo Woman's Christian University, 2009.

[11] A. Yamazaki: Producing new intrinsically knotted or 3-linked graphs, in preparation.

〒 169-8050 東京都 新宿区 西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育学部 数学科
r.t@fuji.waseda.jp

完全グラフ K_7 の手錠グラフ内在可能性について

日本工業大学工学部　岡本美雪
(小林一章氏, 山崎晶子氏との共同研究)

グラフの内在的性質に関する研究としては, Conway-Gordon [1] による完全グラフの結び目内在性や絡み目内在性の研究がまず挙げられる. グラフ G が**結び目内在である**とは G の任意の空間グラフ $\widetilde{G}$ が「非自明な結び目」を含む場合を, グラフ G が**絡み目内在である**とは G の任意の空間グラフ $\widetilde{G}$ が「非分離な, 2 成分の絡み目」を含む場合を言う. 結び目内在性に関しては [3, 4, 5, 6] において結び目内在グラフが複数明らかになっている. また, 絡み目内在性に関してはその極小グラフ集合が完全に決定されている.

グラフの結び目内在性や絡み目内在性から派生した概念として, 結び目内在可能性, 絡み目内在可能性 [2] と言われる内在的性質がある. グラフ G が**結び目内在可能である**とは, G の球面への任意の填め込み $\overline{G}$ からの空間への持ち上げを考えるとき, その中に「非自明な結び目」を含むものが存在する場合を言う. 非自明な結び目の代わりに「非分離な, 2 成分の絡み目」を含む場合, グラフ G は**絡み目内在可能である**という.

本稿では, 手錠グラフ内在可能性という新たな内在的性質を定義し, 頂点数 7 のグラフ関して得られた結果を報告する.

グラフ G が**手錠グラフ内在可能である**とは, G の球面への任意の填め込み $\overline{G}$ からの空間への持ち上げを考えるとき, その中に「既約な空間手錠グラフで, その絡み目成分が分離しているもの」を含むものが存在する場合を言う.

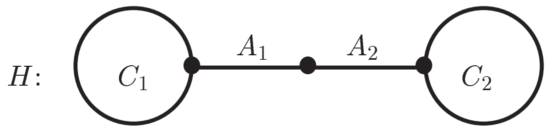
頂点数 9 のグラフ関しては, 山崎氏が $K_9 - (K_{3,3} \cup \{e\})$, $K_9 - (K_{3,2} \cup \{e\})$ が手錠グラフ内在可能であることを示している. また, 頂点数 8 のグラフ関して, 小林 · 山崎両氏との共同研究により K_8 が手錠グラフ内在可能であるという結果が得られ, 研究集会「結び目理論」(2009 年 3 月, 東京女子大学) において報告させていただいた.

いずれの場合にも証明の鍵となっているのは, つぎの補題である.

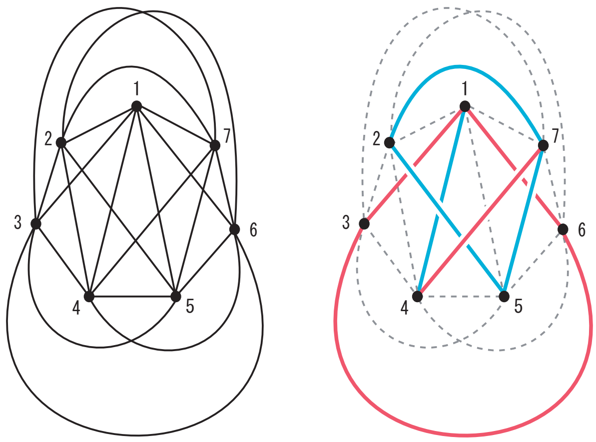
補題　下図のグラフ H の球面への填め込み $\overline{H}$ において

$$\overline{C_1} \cap \overline{A_2} \neq \emptyset, \quad \overline{C_2} \cap \overline{A_1} \neq \emptyset$$

が成り立つとき, $\overline{H}$ は手錠グラフ内在可能である.



単純グラフの射影図において $\overline{H}$ が存在するためには, 8 頂点以上必要であるように見え, 頂点数 7 のグラフに関しては, 当初, 手錠グラフ内在可能ではないと予想し, 研究対象から外していた. しかし, 完全グラフ K_7 の最小交差点数 9 を実現している射影図において、「既約な空間手錠グラフで, その絡み目成分が分離しているもの」を含む場合があることが分かり (下図参照), 研究対象となった.



頂点数 7 のグラフに関して得られた結果は, つぎの通りである.

定理　完全グラフ $K_7 - \{e\}$ は, 手錠グラフ内在可能である.

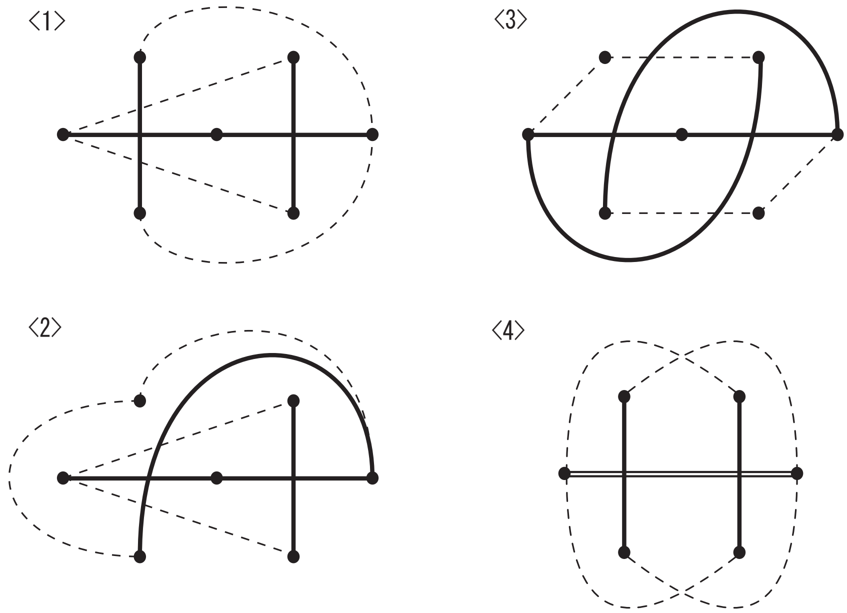
証明の概略　K_7 の対称性より, $e = 17$ としてよい. $K_7 - \{17\}$ の部分グラフ $K_{3,3}^{(1)} = K_{\{1,2,7\}\cup\{3,4,5\}}$ を考えると, $K_{3,3}$ が非平面グラフであることから, 任意の射影図 $\overline{K_{3,3}^{(1)}} \subset \overline{K_7 - \{17\}}$ において非隣接な 2 辺 e_1, e_2 による交点 p_1 が存在する. $K_{3,3}^{(1)}$ の対称性を考慮すると, 非隣接 2 辺 e_1, e_2 の在り方はつぎの 2 通りである.

(A)　2 頂点 1, 7 がともに e_1, e_2 の端点となっている場合

(B)　2 頂点 1, 7 のいずれか一方が e_1 か e_2 の端点となっている場合

(A) の場合: $e_1 = 14$, $e_2 = 37$ としてよい. $K_7 - \{17\}$ の部分グラフ $K_5^{(2)} = K_{\{2,3,5,6,7\}}$ を考えると, K_5 の非平面性より, 任意の射影図 $\overline{K_5^{(2)}} \subset \overline{K_7 - \{17\}}$ においても非隣接な 2 辺 e_3, e_4 による交点 p_2 が存在する.

7 頂点グラフの射影図において非隣接 2 辺による交点 2 つから「既約な空間手錠グラフで, その絡み目成分が分離しているもの」を構成可能なパターンは, つぎの 4 通りである.



p_2 を生成する 2 辺 e_3, e_4 の在り方は全部で 15 通りあり, その全ての場合が 5 つのパターンのいずれかになっていることが分かる.

e_3, e_4 の在り方	手錠グラフ構成のパターン
23 と 56	< 1 >
23 と 57	< 1 >
23 と 67	< 2 >
25 と 36	< 1 >
25 と 37	< 4 >
25 と 67	< 1 >
26 と 35	< 1 >
26 と 37	< 4 >
26 と 57	< 1 >
27 と 35	< 1 >
27 と 36	< 1 >
27 と 56	< 1 >
35 と 67	< 2 >
36 と 57	< 2 >
37 と 56	< 4 >

(B) の場合: $e_1 = 14$, $e_2 = 25$ としてよい. $K_7 - \{17\}$ の部分グラフ $K_5^{(2)} = K_{\{2,3,5,6,7\}}$ を考えると, K_5 の非平面性より, 任意の射影図 $\overline{K_5^{(2)}} \subset \overline{K_7 - \{17\}}$ においても非隣接な 2 辺 e_3, e_4 による交点 p_2 が存在する.

(A) の場合と同様に手錠グラフ構成のパターンを調べると, つぎのようになる.

e_3, e_4 の在り方	手錠グラフ構成のパターン
23 と 56	$< 1 >$
23 と 57	$< 1 >$
23 と 67	$< 2 >$
25 と 36	$< 4 >$
25 と 37	$< 4 >$
25 と 67	$< 4 >$
26 と 35	$< 2 >$
26 と 37	$< 1 >$
26 と 57	$< 2 >$
27 と 35	$< 1 >$
27 と 36	$e = 17$ を利用しないと構成できない
27 と 56	$< 2 >$
35 と 67	$< 1 >$
36 と 57	$e = 17$ を利用しないと構成できない
37 と 56	$< 1 >$

手錠グラフを構成できない 2 通りに関しては, 3 つ目の非平面グラフ $K_5^{(3)} = K_{\{1,3,4,5,6\}}$ の非隣接な 2 辺 e_5, e_6 による交点 p_3 を考える. p_3 を生成する 2 辺 e_5, e_6 の在り方も全部で 15 通りあり, その全ての場合について, p_1 と p_3, あるいは p_2 と p_3 が手錠グラフを構成する 5 つのパターンのいずれかになっていることが分かる. $\square$

参考文献

[1] J. Conway and C. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, J. Graph Theory **7** (1983), 445-453.

[2] A. DeCelles, J. Foisy, C. Versace, A. Wilson *Intrinsically knottable and linkable graphs*, Involve **1** (2008), 145-158.

[3] J. Foisy, *Intrinsically knotted graphs*, J. Graph Theory **39** (2002), 178-187.

[4] J. Foisy, *A newly recognized intrinsically knotted graph*, J. Graph Theory **43** (2003), 199-209.

[5] J. Foisy, *More intrinsically knotted graphs*, J. Graph Theory **43** (2007), 115-124.

[6] K. Kobayashi and M. Okamoto, On the intrinsic knottedness of a cat's cradle graph of K_5, 研究集会「結び目のトポロジー VIII」報告集, 2006.

On a mathematical model of prion proteins

吉田　佳代 (大阪市立大学大学院理学研究科)

m08sa024@ex.media.osaka-cu.ac.jp

概要

狂牛病の原因であると考えられているプリオン蛋白質の数学的モデル (これを**プリオン-タングル**とよぶ) が, 河内明夫先生により提案された. 前駆的プリオン蛋白質 (図 1) において, N-terminal region が失われると, セルラープリオン蛋白質とよばれる正常型プリオン蛋白質またはスクレイピープリオン蛋白質とよばれる異常型プリオン蛋白質に変換される. 正常なものと異常なものが出会った場合, これらから何らかの仕組みにより異常型プリオン蛋白質が生成される. もし, 正常プリオン蛋白質と異常プリオン蛋白質が絡み合うことによって異常プリオン蛋白質になると考えた場合, このようにして生成された異常型プリオン蛋白質は, どのようにして絡み合っているか？という問題が考えられる. このような問題について, 筆者はプリオン-タングルを S^3 内の空間グラフ (これを**プリオングラフ**とよぶ) とみなすことで数学的に考察し, 得られた結果を報告する.

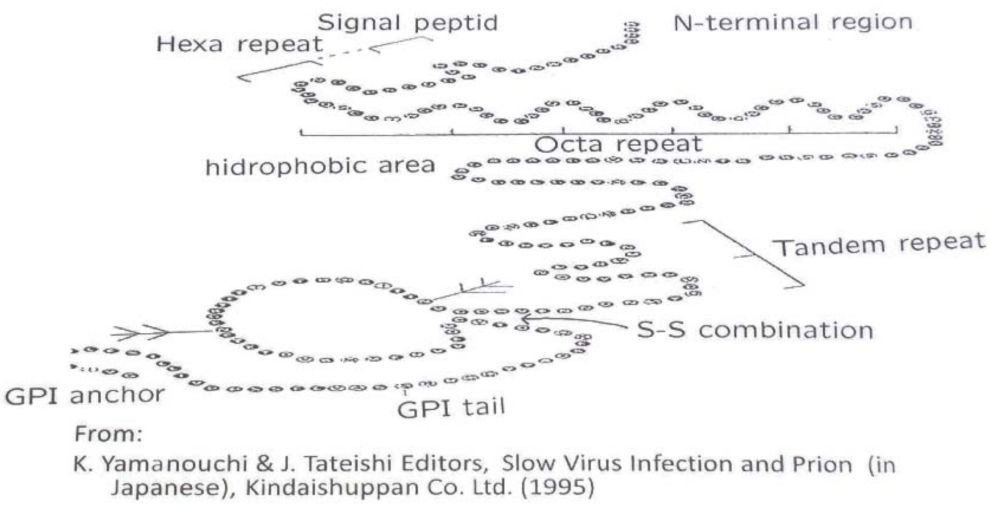


図 1: 前駆的プリオン蛋白質

1

1　プリオンストリングとプリオン-タングル

はじめに, プリオン蛋白質の数学的モデルにおけるプリオンストリングおよびプリオン-タングルというものを定義する.

以下, $H^3_+ = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} | z \geq 0\}$, $H^3_- = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} | z \leq 0\}$ とおく.

定義 1.1　H^3_+ 内のグラフ K が次の条件を満たすとき, K は**プリオンストリング** (*prion string*) であるという.

(i) K は一本の弧 $\alpha(K)$ と一個のループ $\ell(K)$ の和集合 $\alpha(K) \cup \ell(K)$ であらわされる.

(ii) $\alpha(K)$ の一つの端点は H^3_+ の境界と連結しており, もう一つの端点は, $\ell(K)$ 内の一点と連結している.

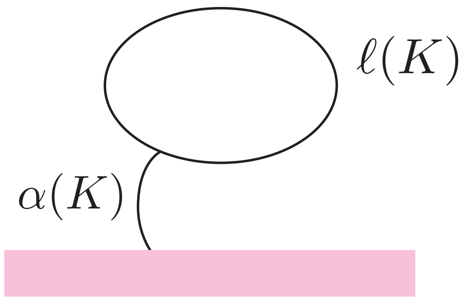


図 2: プリオンストリング

定義 1.2　n 個のプリオンストリング $K_1, K_2, \ldots, K_n$ の和集合 $T = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ が次の条件を満たすとき, T を n 本の**プリオン-タングル** (*prion-tangle*) という.

(i) $K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n = \emptyset$

(ii) $\ell(K_1) \cup \ell(K_2) \cup \cdots \cup \ell(K_n)$ は自明な絡み目である.

特に, プリオンストリング K は, 1 本のプリオン-タングルである.

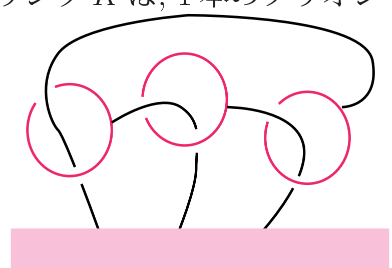


図 3: 3 本のプリオン-タングル

次に, プリオン-タングルの図式を定義する.

定義 1.3 $T = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ をプリオン-タングル, $K_1, \ldots, K_n$ は T を構成するプリオンストリングとする.
まず, $\pi : H^3_+ \longrightarrow H^2_+$ を H^3_+ から 2 次元上半平面 H^2_+ への射影とする. ただし、$\pi(T)$ のすべての多重点は, 横断的に交わる二つの弧の二重点であり, その二重点は $\pi(T)$ の端点上や三価頂点上にないものとする. このとき, $\pi(T)$ において, $\pi(T)$ の各交差点に上下の情報を入れたものをプリオン-タングルの**図式** (*diagram*) という.

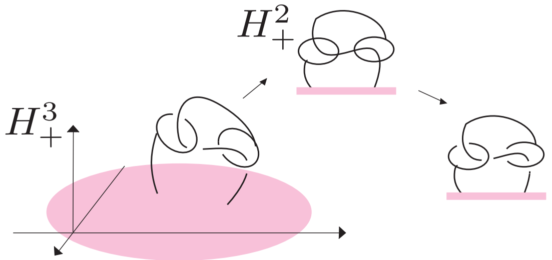


図 4: プリオン-タングルの図式

2 プリオングラフ

次に, プリオン-タングルを S^3 内の空間グラフとみなすことを考える. R^3 に無限遠点を付け加えることで H^3_- から得られる 3 次元球体を一点に縮めることにより, n 本のプリオン-タングルを 3 次元球体 S^3 における空間グラフと考える. (図 5)
このようにして, n 本のプリオン-タングルから得られる空間グラフを**プリオングラフ** (*prion graph*) という.

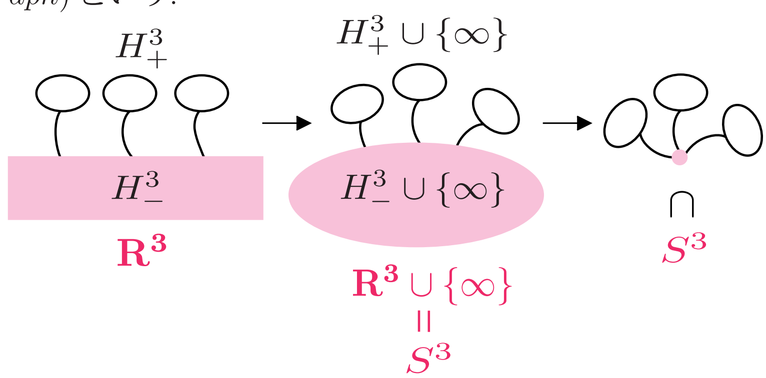


図 5: プリオン-タングルから得られるプリオングラフ

定義 2.1 二つのプリオングラフ G_n, G'_n に対し, $h(G_n) = G_n{}'$ となるような向きを保つ同相写像 $h : S^3 \longrightarrow S^3$ が存在するとき, G_n と G'_n は**同値** (*equivalent*) であるという.

補題 2.2 二つのプリオングラフ G_n と G'_n が同値であるための必要十分条件は, G_n、G'_n のそれぞれの図式が, 有限回のライデマイスター移動 (図 6) で移り合うことである.

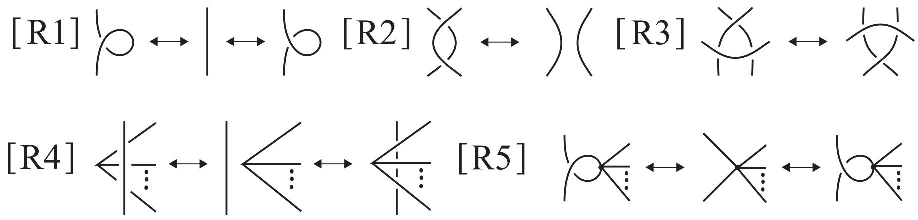


図 6: ライデマイスター移動

3 プリオン-タングルの分離性

定義 3.1 T を n 本のプリオン-タングル, G_n を T から得られたプリオングラフとする. G_n に対して, 次の条件をみたすような 2 次元球面 $S^2 \subset S^3$ が存在するとき, T は**分離している** (*split*) という.
(i) $S^2 \cap G_n = v$
(ii) S^2 で分けられた二つの領域のいずれもが $G_n - \{v\}$ の部分グラフを含む.

注意 3.2 T を n 本のプリオン-タングル, G_n を T から得られたプリオングラフとする. G_n 内のあるループを $\ell(K_i)$ とおくとき, 2 次元円板 δ で

$$\partial\delta = \ell(K_i) \text{ かつ } \mathrm{Int}\delta \cap (G_n - \ell(K_i)) = \emptyset$$

となるようなものが存在ならば, n 本のプリオン-タングルは分離している.

今回, プリオン-タングルの分離性のプリオン-タングルの図式の交点数による特徴づけとして次の結果を得た:

定理 3.3 T を n 本のプリオン-タングル, D を T の図式とする. D の交点数が $2n-1$ 以下ならば, T は分離している.

ただし, 交点数 $2n$ の図式をもつ非分離な n 本のプリオン-タングルの例として, 図 7 のようなものがある. したがって, 定理 3.3 は最良の結果といえる. 図 7 に示す n 本のプリオン-タングルが非分離であることを証明するためには, 図 8 に示す 2 本のプリオン-タングル (図 7 において $n=2$ としたもの) が非分離であること山田多項式 [4] を計算することにより示し, さらに [6] に示されている方法を用いればよい.

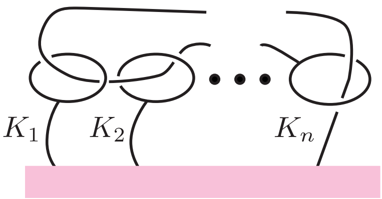


図 7: 交点数 $2n$ の図式をもつ非分離な n 本のプリオン-タングル

図 8: 交点数 4 の図式をもつ非分離な 2 本のプリオン-タングル

今回は, 交点数 $2n$ の図式をもつ非分離な n 本のプリオン-タングルの例として, 一つのプリオンストリングの弧が他のプリオンストリングのループを一回ずつ通過してから自分自身のループを通過しているものを挙げた. このようなもの以外の例は, $n = 3, 4$ の場合に存在することが確認できているため, 一般の n の場合にも存在すると予想される.

(定理 3.3 の証明の概略)
主張の対偶を示す. プリオン-タングル T の図式 D 内の n 個のループのうち, 自己交差点を 0 個または 1 個もつものを $\ell(D_1)$, $\ell(D_2)$,$\ldots \ell(D_p)$, 自己交差点を 2 個以上もつものを $\ell(E_1)$, $\ell(E_2)$,$\ldots \ell(E_q)$ とし, $\ell(D) := \bigcup_{i=1}^{p} \ell(D_i) \cup \bigcup_{j=1}^{q} \ell(E_j)$ とおく. 以下, 図式 D の交点数を $c(D)$ のようにかく.

補題 3,4　T が非分離ならば,

$$c(\textstyle\bigcup_{i=1}^{p} \ell(D_i)) + c(\bigcup_{i=1}^{p} \ell(D_i) \cap \{D - \ell(D)\}) \geq 2p$$

が成り立つ.

補題 3.4 を証明するために, 次の補題 3.5, 3.6 を用いる.

補題 3.5　適当な $i (i \in \{1, 2, \ldots, p\})$ に対し,

$$c(\ell(D_i) \cup \{\ell(D) - \ell(D_i)\}) = 2 \text{ かつ } c(\ell(D_i) \cup \{D - \ell(D)\}) = 0$$

が成り立つならば, T は分離している.

補題 3.6　適当な $i (i \in \{1, 2, \ldots, p\})$ に対し,

$$c(\ell(D_i) \cup \{\ell(D) - \ell(D_i)\}) = 0 \text{ かつ } c(\ell(D_i) \cup \{D - \ell(D)\}) \leq 1$$

が成り立つならば, T は分離している.

(補題 3.4 の証明)

$$V := \min_{1\leq i\leq p}\left\{\frac{1}{2}c(\ell(D_{a_i})\cap\{\ell(D)-\ell(D_{a_i})\})+c(\ell(D_{a_i})\cap\{D-\ell(D)\})\right\}$$

とおく. $V=0$ のときは補題 3.6 より, $V=1$ のときは補題 3.5, 3.6 より, T は分離していることがわかり, T が非分離であるという仮定に反する. よって, $V\geq 2$ である. したがって,

$$\begin{aligned}
&c(\textstyle\bigcup_{i=1}^{p}\ell(D_{a_i}))+c(\bigcup_{i=1}^{p}\ell(D_{a_i})\cap\{D-\ell(D)\})\\
&=\sum_{1\leq i\leq p}\left\{\frac{1}{2}c(\ell(D_{a_i})\cap\{\ell(D)-\ell(D_{a_i})\})+c(D_{a_i}\cap\{D-\ell(D))\}\right\}\\
&\geq Vp\\
&\geq 2p
\end{aligned}$$

□

補題 3.4 より,

$$\begin{aligned}
c(D)&\geq c(\textstyle\bigcup_{i=1}^{p}\ell(D_i))+c(\bigcup_{i=1}^{p}\ell(D_i)\cap\{D-\ell(D)\})+c(\bigcup_{j=1}^{q}\ell(E_j))\\
&\geq 2p+2q\\
&=2n
\end{aligned}$$

□

4 謝辞

はじめに, 早稲田大学の谷山公規先生, 花木良氏に講演の機会を下さったことを深くお礼申し上げます. この研究を行うにあたって, 河内明夫先生, 金信泰造先生をはじめとする大阪市立大学結び目セミナーの皆様に様々なことを御指導いただきました. そして, 谷山公規先生からは有益なアドバイスをいただき, 東京女子大学の新國亮先生からは論文 [6] の存在を教えていただきました. また本講演を行うにあたって, 温かくサポートして下さった大阪市立大学の先輩方と京都大学の鈴木咲衣氏に深く感謝いたします. 本当にありがとうございました.

参考文献

[1] 河内明夫「レクチャー結び目理論」, 共立出版 (2007)

[2] A.Kawauchi, Almost identical imitations of (3,1)-dimensional manifold pairs, Osaka J. Math. 26(1989),743-758

[3] A.Kawauchi, Almost identical link imitations and the skein polynomial, in:Knots 90(1990), 465-476, Walter de Gruyter, Berlin-New York

[4] S.Yamada:An Invariant of Spatial Graphs, J.Graph Theory ,v.13 ,no.5 ,1989, pp.537-551

[5] V. I. Arnold, Remarks on the enumeration of plane curves, Topology of real algebraic varieties and related topics, 17.32, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 173, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[6] K.Taniyama, Irreducibility of spatial graphs, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 11, (2002), 121-124.

A writhe polynomial for spatial graphs

石井敦（筑波大学 大学院数理物質科学研究科）

1　はじめに

本稿では，山田多項式に対してよい正規化を与え，その後，正規化項から空間グラフホモロジー不変量を構成します．まず，いくつかの空間グラフの用語を用意します．有限グラフ G の 3 次元球面 S^3 への埋め込み f を G の空間埋め込みとよび，G の空間埋め込み全体からなる集合を $\mathrm{SE}(G)$ で表します．有限グラフの空間埋め込みを空間グラフとよびます．また，グラフ G の空間埋め込みのダイアグラム全体からなる集合を $\mathcal{D}_G$ で表し，S を集合とします．空間グラフ $f, g \in \mathrm{SE}(G)$ は，向きを保つ S^3 の自己同相写像 φ が存在して $\varphi \circ f = g$ が成り立つとき，*ambient isotopic* であると言います．ambient isotopic な空間グラフのダイアグラムは図 1 の R1–5 の変形を用いて移りあいます [6, 17]．したがって，写像 $v : \mathcal{D}_G \to S$ が R1–5 の変形で不変であるとき，v は ambient isotopy 不変量になります．一方，写像 $v : \mathcal{D}_G \to S$ が R2,3,5 の変形で不変であるとき，v を *regular isotopy* 不変量とよびます．

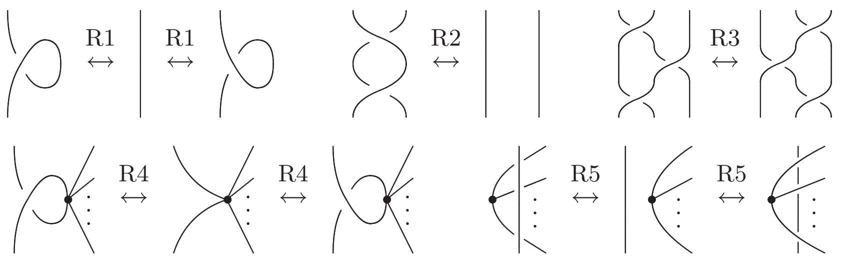
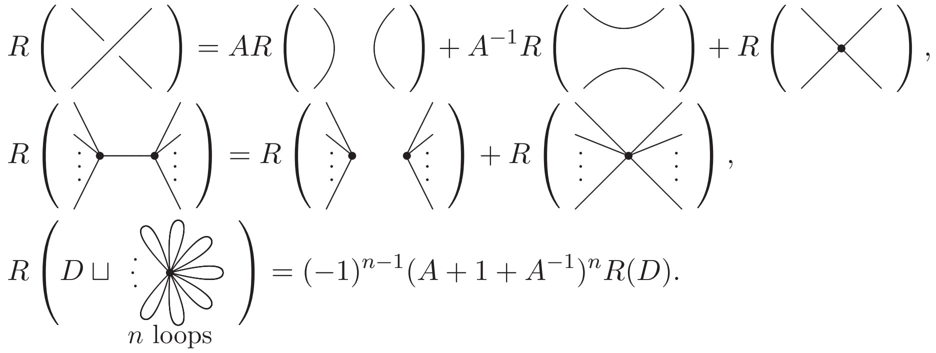


図 1:

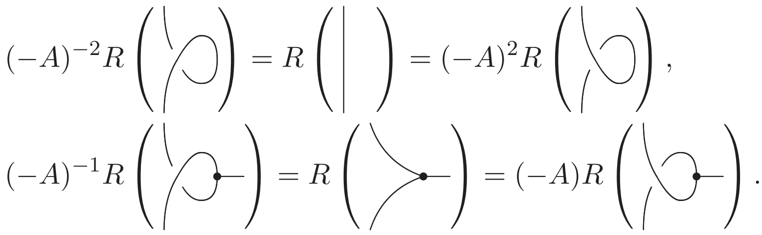
2　山田多項式

空間グラフのダイアグラム D の山田多項式 $R(D)$ [16] は以下の関係式を用いて計算されます．（本稿ではこれらの関係式を山田多項式の定義関

係式とよびます.）



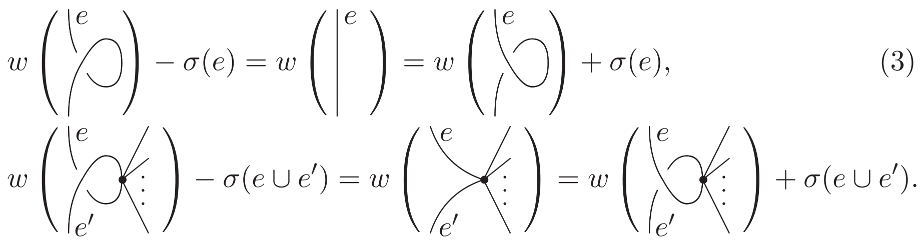
定義関係式から得られる次の関係式は，山田多項式が空間 3 正則グラフに対して $-A$ のべき乗を無視して ambient isotopy 不変量になることを示しています. (3 正則グラフは 3 価グラフともよばれます.）



(1)

(2)

グラフ G の長さ n のパスまたはサイクル全体からなる集合を $\Omega_n(G)$ で表します. 写像 $\sigma : \Omega_1(G) \cup \Omega_2(G) \to \mathbb{Z}$ に対して，次の等式を満たす regular isotopy 不変量 $w : \mathcal{D}_G \to \mathbb{Z}$ を σ-*writhe* とよびます.



(3)

(4)

$S_w(D_f) := (-A)^{-w(D_f)} R(D_f)$ とし，写像 $\tau_G : \Omega_1(G) \cup \Omega_2(G) \to \mathbb{Z}$ を

$$\tau_G(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{if } \omega \in \Omega_1(G) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義すると，(1)–(4) より次の補題が得られます.

補題 1. *G をループを持たない 3 正則グラフとする．w を τ_G-writhe，D_f を $f \in \mathrm{SE}(G)$ のダイアグラムとする．このとき $S_w(D_f)$ は f の ambient isotopy 不変量である．*

3 The writhe for cycles

H をグラフ G の向き付けられた部分グラフとします．空間グラフ $f \in \mathrm{SE}(G)$ のダイアグラム D_f の交点 c において，H の向きから定まる交点のサイン (± 1) を $\mathrm{sgn}(c)_H$ で表します．ただし，交点 c が H の辺からなる交点でないときには $\mathrm{sgn}(c)_H = 0$ と定めます．$\mathcal{H}$ を G のいくつかの向き付けられた部分グラフからなる集合とします．D_f のすべての交点におけるサイン $\mathrm{sgn}(c)_H$ の和を $\mathrm{wr}(D_f)_H$ で表します．

$$\overline{\Gamma}(G) := \{H \subset G \,|\, H \approx S^1 \amalg \cdots \amalg S^1 \text{ (oriented circles)}\}$$

の部分集合 Γ に対して，

$$\sigma_\Gamma : \Omega_1(G) \cup \Omega_2(G) \to \mathbb{Z}; \omega \mapsto \#\{H \in \Gamma \,|\, \omega \subset H\}$$

を Γ の *support* とよびます．$\mathrm{wr}_\Gamma(D_f) := \sum_{H \in \Gamma} \mathrm{wr}(D_f)_H$ に対して次の補題が成り立ちます．

補題 2. $\Gamma \subset \overline{\Gamma}(G)$ に対して，wr_Γ は σ_Γ*-writhe* である．

補題 1, 2 より，τ_G を support に持つ $\Gamma \subset \overline{\Gamma}(G)$ が存在すれば山田多項式を補正することができます．Szekeres [13] と Seymour [10] によって独立に提出されたサイクル二重被覆予想が正しければ，橋を持たないすべての 3 正則グラフに対して τ_G を support に持つ $\Gamma \subset \overline{\Gamma}(G)$ が存在することが分かります．

twisting number $t(D_f)$ は山田多項式を正規化するために Θ [16] と K_4 [3] の空間埋め込みに対して定義されました．図 2 のグラフ Θ において，

$$\gamma_{12} := e_1e_2,\ \gamma_{13} := e_1e_3,\ \gamma_{23} := e_2e_3,\ \Gamma_0 := \{\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}\},$$

図 2 のグラフ K_4 において，

$$\gamma_1 := e_1e_2e_3,\ \gamma_2 := e_1e_4e_5,\ \gamma_3 := e_2e_5e_6,\ \gamma_4 := e_3e_6e_4,$$
$$\gamma_5 := e_1e_2e_6e_4,\ \gamma_6 := e_2e_3e_4e_5,\ \gamma_7 := e_3e_1e_5e_6,$$
$$\Gamma_1 := \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\},\ \Gamma_2 := \{\gamma_5, \gamma_6, \gamma_7\}$$

とすると，次の命題が成り立ちます．

命題 3. 空間埋め込み $f \in \mathrm{SE}(\Theta)$ のダイアグラム D_f に対して次が成り立つ．

$$t(D_f) = \mathrm{wr}_{\Gamma_0}(D_f).$$

空間埋め込み $f \in \mathrm{SE}(K_4)$ のダイアグラム D_f に対して次が成り立つ．

$$t(D_f) = \mathrm{wr}_{\Gamma_1}(D_f) = \mathrm{wr}_{\Gamma_2}(D_f).$$

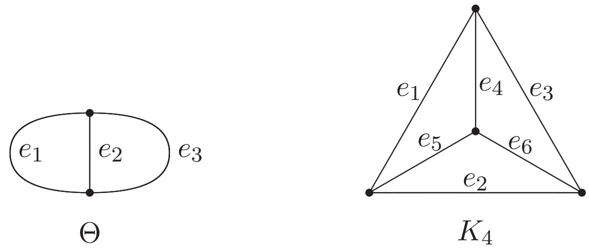


図 2:

4 正規化された山田多項式

2 重点以外の特異点を持たない連続写像 $f : G \to S^3$ を G の *singular embedding* とよび，G の singular embedding 全体の集合を $\mathrm{SE}_\times(G)$ で表します．可換群に値をとる ambient isotopy 不変量 v は，次の関係式を用いて singular embedding に対して一意に拡張できます.（グラフには任意に向きを一つ与えます.）

$$v\left(\quad\right) = v\left(\quad\right) - v\left(\quad\right). \tag{5}$$

$n+1$ 個以上の 2 重点を持つ singular embedding $f \in \mathrm{SE}_\times(G)$ に対して $v(f) = 0$ となるとき，v を order n 以下の有限型不変量 [18, 1, 2, 12] といいます.

定理 4. *G を，τ_G を support に持つ $\Gamma \subset \overline{\Gamma}(G)$ が存在する 3 正則グラフとする．D_f を $f \in \mathrm{SE}(G)$ のダイアグラムとする．このとき $S_{\mathrm{wr}_\Gamma}(D_f)$ は f の ambient isotopy 不変量であり，次を満たす.*

(1) $S_{\mathrm{wr}_\Gamma}(D_f)$ は次の関係式を満たす.

$$S_{\mathrm{wr}_\Gamma}\left(\ c\ \right) = a_1 S_{\mathrm{wr}_\Gamma}\left(\quad\right) + a_2 S_{\mathrm{wr}_\Gamma}\left(\quad\right) + a_3 S_{\mathrm{wr}_\Gamma}\left(\quad\right),$$

ここで $a_1 = A^{-2\mathrm{sgn}_\Gamma(c)}(A^2 + A^{-2} + A^{-4})$, $a_2 = -A^{-4\mathrm{sgn}_\Gamma(c)}(1 + A^{-2} + A^{-6})$, $a_3 = A^{-6\mathrm{sgn}_\Gamma(c)-4}$（ただし $\mathrm{sgn}_\Gamma(c) := \sum_{H\in\Gamma} \mathrm{sgn}(c)_H$）.

特に，関係式内のタングルが同じ辺からなるとき，次の関係式が成り立つ.（グラフには任意に向きを一つ与える.）

$$S_{\mathrm{wr}_\Gamma}\left(\quad\right) = a'_1 S_{\mathrm{wr}_\Gamma}\left(\quad\right) + a'_2 S_{\mathrm{wr}_\Gamma}\left(\uparrow\uparrow\right) + a'_3 S_{\mathrm{wr}_\Gamma}\left(\quad\right),$$

ここで $a'_1 = A^{-2} + A^{-6} + A^{-8}$, $a'_2 = -A^{-8} - A^{-10} - A^{-14}$, $a'_3 = A^{-16}$.

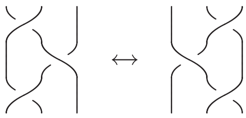


図 3:

(2) $S_{\mathrm{wr}_\Gamma}(f)|_{A=e^x}$ を変数 x のべき乗で展開する．

$$S_{\mathrm{wr}_\Gamma}(f)|_{A=e^x} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(f)x^i.$$

このとき u_i は *order* i 以下の有限型不変量である．

5　空間グラフホモロジー不変量

空間グラフホモロジーは [14] で導入された空間グラフの同値関係です．二つの空間グラフが空間グラフホモロガスであることと，それらのダイアグラムが図 3 に描かれた Δ-move [7, 9] と ambient isotopy を用いて移りあうことは同値です [8]．$\mathrm{wr}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(D_f) := \mathrm{wr}_{\Gamma_1}(D_f) - \mathrm{wr}_{\Gamma_2}(D_f)$ に対して，次の補題が成り立ちます．

補題 5. 同じ *support* を持つ $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \overline{\Gamma}(G)$ に対して，$\mathrm{wr}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(D_f)$ はダイアグラム D_f で表される空間グラフ $f \in \mathrm{SE}(G)$ の空間グラフホモロジー不変量である．

G を K_5 または $K_{3,3}$ とします（図 4）．空間グラフ $f \in \mathrm{SE}(G)$ の Simon 不変量 (cf. [14]) は次のように定義されます．G の交わらない辺 x, y に対して，サイン $\varepsilon(x,y) = \varepsilon(y,x)$ を

$$\varepsilon(e_i, e_j) = 1, \quad \varepsilon(d_i, d_j) = -1, \quad \varepsilon(e_i, d_j) = -1$$

および

$$\varepsilon(c_i, c_j) = 1, \quad \varepsilon(b_k, b_l) = 1,$$
$$\varepsilon(c_i, b_k) = \begin{cases} 1 & c_i \text{ と } b_k \text{ が図 4 において平行で向きも一致するとき} \\ -1 & c_i \text{ と } b_k \text{ が図 4 において平行で向きが反対であるとき} \end{cases}$$

によって定めます．$l(D_f; x, y)$ を x と y の間の正交点の数から負交点の数を引いた数とします．このとき Simon 不変量は次で定義されます．

$$L(f) = \sum_{x \cap y = \emptyset} \varepsilon(x,y)\, l(D_f; x, y)$$

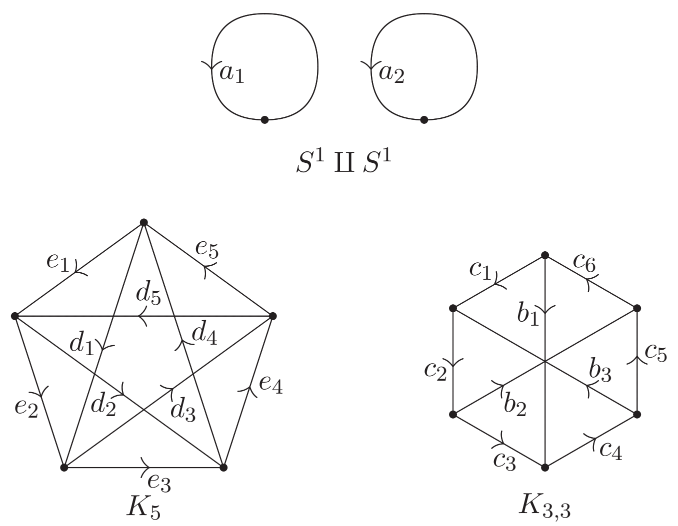


図 4:

ここで $\sum_{x\cap y=\emptyset}$ は G の交わらない 2 辺 x, y の順序付けられていない組全体に関する和を表します.

以下では，サイクル $x_1 \cdots x_n$ の各辺に x_1 に同調する向きが与えられているとします．$G = S^1 \amalg S^1$ に対して $\Gamma_1^G, \Gamma_2^G \in \overline{\Gamma}(G)$ を次で定義します.

$$\Gamma_1^G = \{a_1 \cup a_2\}, \quad \Gamma_2^G = \{a_1 \cup (-a_2)\}.$$

$G = K_5$ に対して $\Gamma_1^G, \Gamma_2^G \in \overline{\Gamma}(G)$ を次で定義します.

$$\Gamma_1^G = \{e_i e_{i+1} d_i \,|\, 1 \leq i \leq 5\} \cup \{d_i e_{i+2} d_{i+3} \,|\, 1 \leq i \leq 5\},$$
$$\Gamma_2^G = \{d_1 d_3 d_5 d_2 d_4\} \cup \{e_i d_{i+1} e_{i+2} d_{i+2} e_{i+4} \,|\, 1 \leq i \leq 5\},$$

ただし $i > 5$ であるとき d_i と e_i はそれぞれ d_{i-5} と e_{i-5} を表すものとします．$G = K_{3,3}$ に対して $\Gamma_1^G, \Gamma_2^G \in \overline{\Gamma}(G)$ を次で定義します.

$$\Gamma_1^G = \{c_1c_2c_3c_4c_5c_6, c_1b_3c_5b_2c_3b_1, c_2b_2c_6b_1c_4b_3\},$$
$$\Gamma_2^G = \{c_1c_2c_3c_4c_5c_6, c_1b_3c_4b_1, c_2b_2c_5b_3, c_3b_1c_6b_2\}.$$

以下では，補題 5 より $\mathrm{wr}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(D_f)$ を $\mathrm{wr}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(f)$ と表します.

補題 6. $G = S^1 \amalg S^1$ の空間埋め込み f に対して次が成り立つ.

$$\mathrm{lk}(f) = \mathrm{wr}_{\Gamma_1^G,\Gamma_2^G}(f)/4.$$

$G = K_5$ の空間埋め込み f に対して次が成り立つ.

$$L(f) = \mathrm{wr}_{\Gamma_1^G,\Gamma_2^G}(f).$$

$G = K_{3,3}$ の空間埋め込み f に対して次が成り立つ.

$$L(f) = \mathrm{wr}_{\Gamma_1^G, \Gamma_2^G}(f).$$

この補題と Shinjo と Taniyama [11] の結果を用いることで次の定理を得ることができます.

定理 7. グラフ G の空間埋め込み f と g が空間グラフホモロガスであるための必要十分条件は，同じ *support* を持つすべての $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \overline{\Gamma}(G)$ に対して $\mathrm{wr}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(f) = \mathrm{wr}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(g)$ が成り立つことである.

参考文献

[1] J. S. Birman and X.-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111** (1993) 225–270.

[2] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology **34** (1995) 423–472.

[3] C. Hangai, *Vassiliev type invariant for spatial graphs and Yamada polynomial* (Japanese), Master's Thesis, Tokyo Woman's Christian University (2008).

[4] S. Horiuchi, *Vassiliev type invariants for spatial embeddings of* K_4, preprint.

[5] Y. Huh and G. T. Jin, *θ-curve polynomials and finite-type invariants*, J. Knot Theory Ramifications **11** (2002) 555–564.

[6] L. H. Kauffman, *Invariants of graphs in three-space*, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989) 697–710.

[7] S. V. Matveev, *Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology spheres* (Russian), Mat. Zametki **42** (1987) 268–278, 345.

[8] T. Motohashi and K. Taniyama *Delta unknotting operation and vertex homotopy of graphs in* $\mathbb{R}^3$, KNOTS '96 (Tokyo), 185–200, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.

[9] H. Murakami and Y. Nakanishi, On a certain move generating link-homology, Math. Ann. 284 (1989), 75-89.

[10] P. D. Seymour, *Sums of circuits*, Graph theory and related topics (Proc. Conf., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1977), Academic Press, New York, 1979, pp. 341–355.

[11] R. Shinjo and K. Taniyama, *Homology classification of spatial graphs by linking numbers and Simon invariants*, Topology Appl. **134** (2003) 53–67.

[12] T. Stanford, *Finite-type invariants of knots, links, and graphs*, Topology **35** (1996) 1027–1050.

[13] G. Szekeres, *Polyhedral decompositions of cubic graphs*, Bull. Austral. Math. Soc. **8** (1973) 367–387.

[14] K. Taniyama, *Cobordism, homotopy and homology of graphs in* $\mathbb{R}^3$, Topology **33** (1994) 509–523.

[15] K. Taniyama, *Homology classification of spatial embeddings of a graph*, Topology Appl. **65** (1995) 205–228.

[16] S. Yamada, *An invariant of spatial graphs*, J. Graph Theory **13** (1989) 537–551.

[17] D. N. Yetter, *Category theoretic representations of knotted graphs in* S^3, Adv. Math. **77** (1989) 137–155.

[18] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, Theory of singularities and its applications, 23–69, Adv. Soviet Math., 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

1 の偶数乗根におけるレンズ空間の TURAEV-VIRO $SO(3)$ 不変量について

岡崎 建太

Abstract. 1980 年代後半に Witten は, 半単純コンパクト Lie 群 G に対して, 3 次元多様体上の主 G 束における Chern-Simons 理論を考え, その相関関数がその 3 次元多様体の位相不変量を与えるということを提唱した. Reshetikhin と Turaev は Witten の提唱した不変量を初めて数学的に厳密に定式化した (**Reshetikhin-Turaev 不変量**). その後 Kirby と Melbin は, $G = SU(2)$ の場合にこの不変量の refinment を定義した (**refined Reshetikhin-Turaev 不変量**). Lickorish, Blanchet は $G = SU(2)$ の場合に, これらの不変量を linear skein を用いて再定式化した. Sato はレンズ空間の refind Reshetikhin-Turaev 不変量の一部の値を, 3 次元多様体の Heegaard 分解を使って計算した. 一方 Turaev と Viro は, $G = SU(2), SO(3)$ のときに, 3 次元多様体の spine に基づいて, G の量子 $6j$-記号から 3 次元多様体の不変量を構成した (**Turaev-Viro 不変量**).

本報告では (refined) Reshetikhin-Turaev 不変量の linear skein を用いた定義について復習した後, レンズ空間 $L(a, 1)$ の refined Reshetikhin-Turaev 不変量の計算について, 3 次元多様体の手術表示を用いて Sato の証明の別証明を与える. また, Sato の結果から, $L(a, 1)$ の Turaev-Viro $SO(3)$ 不変量の値を導く.

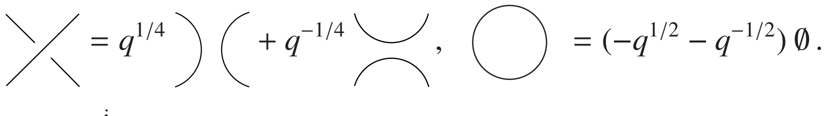
1. Linear skein

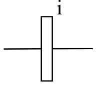
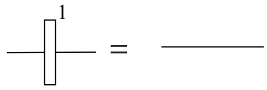
linear skein の言葉を用いることによって, 各不変量を量子群に関する知識を直接用いずに構成することができる. この節では linear skein に関する基本的な事項について復習する. 以下 r を 3 以上の整数, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}/r}$, $\Delta_i = (-1)^i (q^{(i+1)/2} - q^{-(i+1)/2})/(q^{1/2} - q^{-1/2})$ とおく.

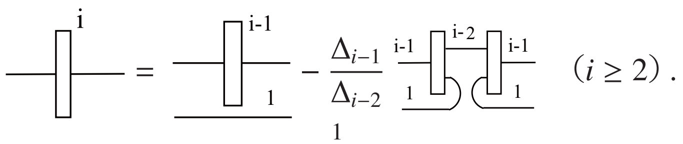
F を曲面とし, 境界 ∂F 上に $2n$ 個の点（$n \geq 0$）を順序もこめて固定したものを $(F, 2n)$ と表す. $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{S}(F, 2n)$ を

$$\mathcal{S}(F, 2n) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{(F, 2n) \text{ 上のタングル図式 }\}/\sim$$

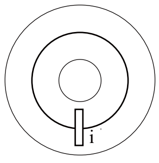
で定める. ただし $(F, 2n)$ 上のタングル図式とは F 上のタングル図式で, 指定された $2n$ 個の点上に端点を持つもののことをいう. また同値関係 $\sim$ は曲面 F 上の isotopy および次の skein 関係式を表す.

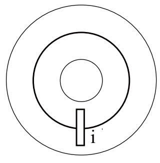


$\mathcal{S}(D^2, 2i)$ の元  (**Jones-Wenzl べき等元**という) を,  かつ次で定める [7].

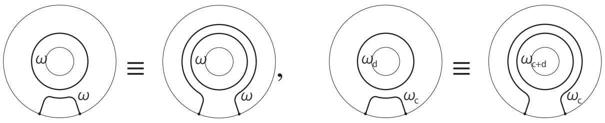


ただし自然数の付与されている曲線は, その本数だけ平行に束ねてある曲線を表す. 円環 $A = S^1 \times [0,1]$ に対して, $\mathcal{S}(A,0)$ の元 ω, ω_c $(c = 0,1)$ を次で定める.

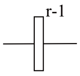
$$\omega = \sum_{0\leq i\leq r-1} \Delta_i$$


$$\omega_c = \sum_{\substack{0\leq i\leq r-1\\ i\equiv c \pmod 2}} \Delta_i$$


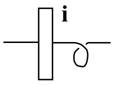
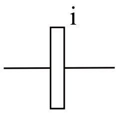
さらに, F 上のタングル図式 D に対して, $\mathcal{S}(F)$ の元 D^{ω}, D^{ω_c} $(c = 0,1)$, を, D の各成分にそれぞれ ω, ω_c を代入することによって定める. このとき, 次の**ハンドルスライド性質**が成り立つ [6, 1].



$(c, d \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\})$.

ここに ≡ は左辺と右辺の差が  を含むタングル図式の線型和で表されることを意味する.

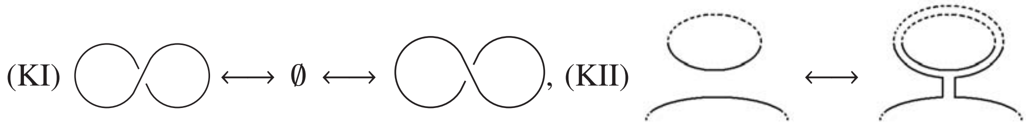
補題 1.1. 次が成り立つ.

(1)  $= (-1)^i q^{\frac{(i+1)^2-1}{4}}$  .

2. (refined) Reshetikhin-Turaev 不変量

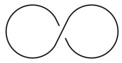
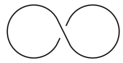
3 次元多様体の不変量である Reshetikhin-Turaev 不変量は Reshetikhin-Turaev [9] によって最初に定式化され, Kirby-Melvin [3] によって refined Reshetikhin-Turaev 不変量に拡張された. これらの不変量は各々 Lickorish [4, 5, 6] と Blanchet [1] によって linear skein を用いて初等的に再定式化された. この節では linear skein を用いた (refined) Reshetikhin-Turaev 不変量の定義について復習する. 以下 $\langle\rangle$ は Kauffman 括弧を表すものとする.

任意の連結な有向閉 3 次元多様体 M は S^3 内の枠付き絡み目 L にそって S^3 を手術することによって得られることが知られている. このとき, L を M の**手術表示**という. 連結な有向閉 3 次元多様体 M_1, M_2 とそれらの手術表示 L_1, L_2 について, M_1 と M_2 が同相であるための必要十分条件は, L_1 と L_2 が以下の移動 (**Kirby 移動**という) を有限回施すことによって移りあうことである, ということが知られている [2].



ただし図の点線部分は, 自身や他の絡み目成分と絡まっていてもよいこと表す.

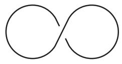
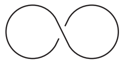
M を連結な有向閉 3 次元多様体, L をその手術表示とする. 3 以上の整数 r に対して M の **Reshetikhin-Turaev SU(2) 不変量** を

(2) $\tau_r^{SU(2)}(M) = \Big\langle$  $^{\omega}\Big\rangle^{-\sigma_+}\Big\langle$  $^{\omega}\Big\rangle^{-\sigma_-}\langle L^{\omega}\rangle$

で定める. ここに σ_+, σ_- は各々L の絡み数行列の正, 負の固有値の個数を表す.

命題 2.1 (Lickorish [4, 5, 6])**.** 連結な有向閉 3 次元多様体 M に対し, (2) の値は L の取り方に依らない. ゆえに $\tau_r^{SU(2)}(M)$ は M の位相不変量である.

次にこの不変量の refinement を定義する. M を連結な有向閉 3 次元多様体とし, そのコホモロジー類 $x \in H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を選ぶ. $L = L_1 \cup \cdots \cup L_N$ を M の手術表示とし, 包含写像 $\iota : S^3 - L \to M$ について $(\iota^* x)(L_j$の緯線$)$ を x_j とおく. $r \equiv 2 \pmod 4$ である 4 以上の偶数 r に対して、対 (M, x) の **refined Reshetikhin-Turaev 不変量**を

(3) $\tau_r(M, x) = \Big\langle$  $^{\omega_0}\Big\rangle^{-\sigma_+}\Big\langle$  $^{\omega_0}\Big\rangle^{-\sigma_-}\langle L^{\omega_x}\rangle$

で定める [1]. ここに $\langle L^{\omega_x}\rangle = \langle L_1^{\omega_{x_1}} \cup \cdots \cup L_N^{\omega_{x_N}}\rangle$.

命題 2.2 (Blanchet [1])**.** 連結な有向閉 3 次元多様体 M とコホモロジー類 $x \in H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に対し, (3) の値は L の取り方に依らない. ゆえに $\tau_r(M, x)$ は 対 (M, x) の位相不変量である.

命題 2.1 と命題 2.2 の証明の方針. いずれの命題も, 前述のハンドルスライド性質を用いて, L に対する Kirby 移動で (2) あるいは (3) の値が不変であることを示すことにより, これらの値は L の取り方に依らないことが示される. 詳しくは [8, 1] を参照. □

3. refined Reshetikhin-Turaev 不変量の手術表示を用いた計算

レンズ空間 $L(a, 1)$ の refined Reshetikhin-Turaev 不変量の値を 3 次元多様体の手術表示を用いて計算し, Sato による結果 (命題 3.2) の別証明を与える. 以下では, p を奇素数, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}/r}$, $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/p}$, $G_p = \sum_{0\le i<p}\zeta^{i^2}$ (平方 Gauss 和) とおく. また, 互いに素な整数の組 (a, b) に対して, $s(b, a)$ は Dedekind 和を表すものとする.

補題 3.1. 次が成り立つ.

$$12\, s(1, a) \;=\; -3 + a + \frac{2}{a}\,.$$

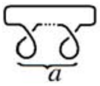
命題 3.2 (Sato [11])**.** p を奇素数, a を p と互いに素な偶数とするとき, 次が成り立つ.

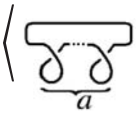
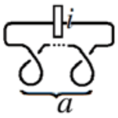
$$\tau_{2p}(L(a, 1), 0) = \left(\frac{a}{p}\right)\zeta^{-3\cdot\bar{2}s(1,a)^\vee}\,\frac{\zeta^{\overline{4a}} + \zeta^{-\overline{4a}}}{\zeta^{\bar{4}} + \zeta^{-\bar{4}}} \tag{4}$$

$$\tau_{2p}(L(a, 1), 1) = -\left(\frac{a}{p}\right)\zeta^{-3\cdot\bar{2}s(1,a)^\vee}\,\frac{\zeta^{\overline{4a}} - \zeta^{-\overline{4a}}}{\zeta^{\bar{4}} + \zeta^{-\bar{4}}}\,(\sqrt{-1})^{\epsilon a/2} \tag{5}$$

ただし, $p \equiv \epsilon \pmod 4$, $\epsilon = \pm 1$ とおき, $s(b, a)^\vee$ は Dedeind 和 $s(b, a)$ の値を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上で考えたものである（n'/n は $n'\,\bar{n}$ とみなす）.

証明. Sato [11] の証明は 3 次元多様体の Heegaard 分解を用いているが, 以下では 3 次元多様体の手術表示を用いて Sato [11] の証明の別証明を与える.

整数 $a \neq 0$ に対して, framing が a の自明な結び目  は $L(a,1)$ の手術表示である. まず, 式 (4) を示す.

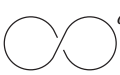
$\Big\langle$  $\Big\rangle^{\omega_0} = \sum_{\substack{0\le i<r\\ i:\text{偶数}}} \Delta_i$ 

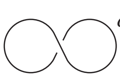
$$= \sum_{\substack{0<i\le r\\ i:\text{奇数}}} q^{a(i^2-1)/4}\Delta_{i-1}^2 = \frac{2q}{(q-1)^2}\sum_{\substack{0<i\le r\\ i:\text{奇数}}} q^{a(i^2-1)/4}(q^i-1)$$

$$= \frac{2q}{(q-1)^2}\sum_{0\le j<p} q^{a(j^2+j)}(q^{2j+1}-1) = \frac{2\zeta^{\overline{2}}}{(\zeta^{\overline{2}}+1)^2}\sum_{0\le j<p}\zeta^{\overline{2}a(j^2+j)}(\zeta^{\overline{2}(2j+1)}+1)$$

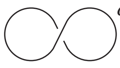
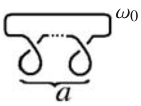
$$= \frac{2}{(\zeta^{\overline{4}}+\zeta^{\overline{-4}})^2}\sum_{0\le j<p}(\zeta^{\overline{2}(aj^2+(a+2)j+1)}+\zeta^{\overline{2}(aj^2+aj)}) = 2\zeta^{-\overline{8}(a+2\overline{a}))}\frac{\zeta^{\overline{4a}}+\zeta^{-\overline{4a}}}{(\zeta^{\overline{4}}+\zeta^{-\overline{4}})^2}\left(\frac{\overline{2}a}{p}\right)G_p.$$

ただし 2 番目の等式で補題 1.1 を, 3 番目の等式で添字の変換 $i \to -i$ に関する対称性を使い, 4 番目の等式で $i = 2j+1$ とおき, 5 番目の等式で $q = -\zeta^{\overline{2}}$ を代入し, 最後の等式では平方完成をして整理した.
特に $a = 1, -1$ のとき,

(6) $\Big\langle$  $\Big\rangle^{\omega_0} = \dfrac{2\zeta^{-3\cdot\overline{8}}}{\zeta^{\overline{4}}+\zeta^{-\overline{4}}}\left(\dfrac{\overline{2}}{p}\right)G_p,$

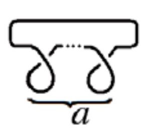
(7) $\Big\langle$  $\Big\rangle^{\omega_0} = \dfrac{2\zeta^{3\cdot\overline{8}}}{\zeta^{\overline{4}}+\zeta^{-\overline{4}}}\left(\dfrac{-\overline{2}}{p}\right)G_p = \left(\dfrac{-1}{p}\right)\zeta^{3\cdot\overline{4}}\Big\langle$  $\Big\rangle^{\omega_0}.$

よって,

$\tau_{2p}(L(a,1),0) = \Big\langle$  $\Big\rangle^{\omega_0\,-1}\Big\langle$  $\Big\rangle^{\omega_0}$

$$= \left(\frac{a}{p}\right)\zeta^{\overline{8}(3-a-2\overline{a})}\frac{\zeta^{\overline{4a}}+\zeta^{-\overline{4a}}}{\zeta^{\overline{4}}+\zeta^{-\overline{4}}} = \left(\frac{a}{p}\right)\zeta^{-3\cdot\overline{2}s(1,a)^\vee}\frac{\zeta^{\overline{4a}}+\zeta^{-\overline{4a}}}{\zeta^{\overline{4}}+\zeta^{-\overline{4}}}.$$

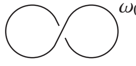
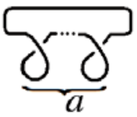
ただし最後の等式で補題 3.1 を用いた. ゆえに式 (4) は示された.
続いて式 (5) を示す.

$\Big\langle$  $\Big\rangle^{\omega_1} = \sum_{\substack{0\le i<r\\ i:\text{奇数}}} \Delta_i$  $= -\sum_{\substack{0<i\le r\\ i:\text{偶数}}} q^{a(i^2-1)/4}\Delta_{i-1}^2$

$$= \frac{-2q}{(q-1)^2}\sum_{\substack{0<i\le r\\ i:\text{偶数}}} q^{a(i^2-1)/4}(q^i-1) = \frac{-2q^{1-a/4}}{(q-1)^2}\sum_{0\le j<p} q^{aj^2}(q^{2j}-1)$$

$$= \frac{2q^{-a/4}\zeta^{\overline{2}}}{(\zeta^{\overline{2}}+1)^2}\sum_{0\le j<p}\zeta^{\overline{2}aj^2}(\zeta^j-1) = 2q^{-a/4}\zeta^{-\overline{4a}}\frac{\zeta^{\overline{4a}}-\zeta^{-\overline{4a}}}{(\zeta^{\overline{4}}+\zeta^{-\overline{4}})^2}\left(\frac{\overline{2}a}{p}\right)G_p.$$

ただし 2 番目の等式では補題 1.1 を用い, 3 番目の等式で添字の変換 $i \to -i$ に関する対称性を使い, 4 番目の等式では $i = 2j$ とおき, 5 番目の等式では $q = -\zeta^{\overline{2}}$ を代入し, 最後の等式では平方完成をして整理した. よって式 (6) より,

$$\tau_{2p}(L(a,1),1) = \left\langle \right.$$  $$\left.{}^{\omega_0}\right\rangle^{-1} \left\langle \right.$$  $$\left.{}^{\omega_1}\right\rangle$$

$$= \left(\frac{a}{p}\right) q^{-a/4} \zeta^{\overline{8}(3-2\overline{a})} \frac{\zeta^{\overline{4a}} - \zeta^{-\overline{4a}}}{\zeta^{\overline{4}} + \zeta^{-\overline{4}}} = \left(\frac{a}{p}\right) q^{-a/4} \zeta^{\overline{8}a} \zeta^{-3\cdot\overline{2}s(1,a)^\vee} \frac{\zeta^{\overline{4a}} - \zeta^{-\overline{4a}}}{\zeta^{\overline{4}} + \zeta^{-\overline{4}}}.$$

ただし最後の等式では補題 3.1 を用いた. $e_n(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}(n/x)}$ とおくとき, $\overline{2} = (p+1)/2$ だから,

$$q^{-a/4}\zeta^{\overline{8}a} = e_{8p}((8\cdot\overline{8}-1)a) = e_4((p^2+3p+1)\frac{a}{2}) = -e_4((2+3\epsilon)\frac{a}{2}) = -(\sqrt{-1})^{\epsilon a/2}.$$

ゆえに式 (5) は示された. □

4. Turaev-Viro $SO(3)$ 不変量の導出

Turaev と Viro は, 閉 3 次元多様体 M の spine に基づいて, $G = SU(2)$ または $SO(3)$ の量子 $6j$-記号から定まる '重み' の '状態和' を取ると, この値は spine の取り方によらない不変量を与えることを示した. これが **Turaev-Viro 不変量** $TV_r^G(M)$ である [12]. $TV_r^{SO(3)}(M)$ の値は, $\tau_r(M,x)$ の値から導かれることが次によりわかる. この命題は Roberts [10] による結果の言い換えである.

命題 4.1. r が偶数のとき, 連結な有向閉 3 次元多様体 M について,

$$TV_r^{SO(3)}(M) = \sum_x |\tau_r(M,x)|^2 .$$

命題 3.2 とこの命題により, 次が得られる.

定理 4.2. p を奇素数, a を p と互いに素な偶数とするとき, 次が成り立つ.

$$TV_{2p}^{SO(3)}(L(a,1)) = \frac{4}{\zeta^{\overline{4}} + \zeta^{-\overline{4}}}$$

References

[1] Blanchet, C., *Invariants on three-manifolds with spin structure*. Comment. Math. Helv. **67** (1992), no. 3, 406–427.

[2] Kirby, R., *A calculus for framed links in S^3.*. Invent. Math. **45** (1978), 35–56.

[3] Kirby, R., Melvin, P., *The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for* sl$(2,C)$. Invent. Math. **105** (1991), no. 3, 473–545.

[4] Lickorish, W. B. R., *Invariants for 3-manifolds from the combinatorics of the Jones polynomial*. Pacific J. Math. **149** (1991), No.2, 337–347

[5] ———, *Three-manifolds and the Temperley-Lieb algebra*. Math. Ann. **290** (1991), 657–670.

[6] ———, *Calculations with the Temperley-Lieb algebra*. Comment. Math. Helvetici **67** (1992), 571–591.

[7] ———, *The skein method for three-manifold invariants* J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), no. 2, 171–194.

[8] ———, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Math. **175**, Springer-Verlag, 1997.
[9] Reshetikhin, N., Turaev, V. G., *Invariants of* 3*-manifolds via link polynomials and quantum groups*. Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 547–597.
[10] Roberts, J., *Refined state-sum invariants of 3- and 4- manifolds*. In Geometric topology (Athens, GA, 1993), 217–234. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
[11] Sato, C., *Perturbative Invariants of lens spaces associated with cohomology classes* J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), no. 7, 913–929.
[12] Turaev, V. G., Viro, O. Y., *State sum invariants of* 3*-manifolds and quantum* 6*j-symbols*. Topology **31** (1992), no. 4, 865–902.

On the bridge genus and the braid genus for a lens space

Shin′ya Okazaki (Osaka City University)
岡崎真也 (大阪市立大学)

January 12, 2010

Abstract

任意の向き付け可能な連結閉多様体は 3 次元球面からある絡み目に沿った 0-手術により得られることが知られている。本稿ではこのようにして得られた多様体に対して橋種数と組ひも種数と呼ばれる不変量を導入する。これらの橋種数、組ひも種数と Heegaard 種数との間にはある不等式が成立することが分かっている。今回はいくつかのレンズ空間に対して橋種数と組ひも種数を計算することができたのでこれを報告する。

1 橋種数と組ひも種数の定義

まず最初に 0-手術の定義をする。

<u>**定義**</u> (S^3 の L に沿った 0-手術)
$L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ を 3 次元球面 S^3 上の n 成分絡み目とする。$N(L)$ を L の管状近傍とする。$E(L)$ を L の外部をする。$\chi(L, 0)$ を $E(L)$ の境界と n 個のソリッドトーラスを貼り合わせることで得られた 3 次元多様体をする。但し、貼り合わせ方は各ソリッドトーラスのメリディアンを K_i のロンジチュードへうつすものとする。このようにして得られた 3 次元多様体 $\chi(L, 0)$ を S^3 の L に沿った 0-手術により得られた多様体と呼ぶ。

次のような事実が知られている。

<u>**事実**</u>
任意の向き付け可能な連結 3 次元閉多様体は 3 次元球面からある絡み目に沿った 0-手術により得られる。

以降 3 次元多様体と書けば向き付け可能な連結 3 次元閉多様体を指すこととする。bridge(L) と書けば絡み目 L の橋指数を braid(L) と書けば L の組ひも数を指すこととする。次の橋種数と組ひも種数は河内により定義されたものである。

定義 (橋種数と組ひも種数)
一般に 3 次元多様体に対しそれが得られるような 3 次元球面の絡み目に沿った 0-手術というものはいくつも考えられる。3 次元多様体 M に対し M が得られるような S^3 のあらゆる絡み目に沿った 0-手術を考え、そのなかで橋指数が最小となる絡み目 L の bridge(L) を M の橋種数と呼び $g_{\mathrm{bridge}}(M)$ で表す。同様に 3 次元多様体 M に対し M が得られるような S^3 のあらゆる絡み目に沿った 0-手術を考え、そのなかで組ひも数が最小となる絡み目 L の braid(L) を M の組ひも種数と呼び $g_{\mathrm{braid}}(M)$ で表す。

先に述べた事実より任意の 3 次元多様体に対し橋種数、組ひも種数が定義できるということが分かる。2 つの種数の間には $g_{\mathrm{bridge}}(M) \leq g_{\mathrm{braid}}(M)$ という関係が成り立つ。このことは任意の絡み目 L に対し bridge$(L) \leq$ braid(L) となることからすぐに示せる。次にこれらの 2 つの種数と Heegaard 種数との間の比較をする。そのためにまず Heegaard 分解と Heegaard 種数の定義をする。

定義 (Heegaard 分解と Heegaard 種数)
一般に 3 次元多様体 M に対して種数が等しい 2 つのハンドルボディ H_1、H_2 で同相写像 $f : \partial H_1 \to \partial H_2$ により、H_1 の境界と H_2 の境界を同一視して得られる和集合 $H_1 \cup_f H_2$ が M となるようなものが存在する。このときこの 3 つ組 $(H_1, H_2; f)$ を M の Heegaard 分解という。一般に 3 次元多様体 M に対して Heegaard 分解はいくつも考えられる。それらの Heegaard 分解のなかから H_1、H_2 の種数が最小となる場合を考え、その種数を M の Heegaard 種数と呼び $g_{\mathrm{H}}(M)$ で表す。

このとき次の定理が成立する。

定理 1

$$g_{\mathrm{H}}(M) \leq g_{\mathrm{bridge}}(M) \leq g_{\mathrm{braid}}(M).$$

定理 1 と次の定理 2 は前回の結び目の数学と昨年に大阪市立大学で行われた院生ワークショップで示したので証明は省略する。

定理 2
次の不等式のいずれに対してもその不等式を満たす 3 次元多様体が存在する。

$$\begin{gathered} g_{\mathrm{H}}(M)=g_{\mathrm{bridge}}(M)=g_{\mathrm{braid}}(M), \\ g_{\mathrm{H}}(M)<g_{\mathrm{bridge}}(M)=g_{\mathrm{braid}}(M), \\ g_{\mathrm{H}}(M)=g_{\mathrm{bridge}}(M)<g_{\mathrm{braid}}(M), \\ g_{\mathrm{H}}(M)<g_{\mathrm{bridge}}(M)<g_{\mathrm{braid}}(M). \end{gathered}$$

次に 2 つの 3 次元多様体 $S^1 \times S^2$、S^3 に対し 3 つの種数を求める。

例
K を自明な結び目とする。このとき $\chi(K,0)$ は $S^1 \times S^2$ である。一般に 3 次元多様体 M が $g_{\mathrm{H}}(M)=0$ を満たすことの必要十分条件は $M=S^3$ であるということが知られている。従って $g_{\mathrm{H}}(S^1 \times S^2) \geq 1$ である。自明な結び目の組ひも数は 1 であるから、$g_{\mathrm{braid}}(S^1 \times S^2) \leq 1$ である。従って次の等式を得る。

$$g_{\mathrm{H}}(S^1 \times S^2)=g_{\mathrm{bridge}}(S^1 \times S^2)=g_{\mathrm{braid}}(S^1 \times S^2)=1$$

例
L をホップリンクとする。このとき $\chi(L,0)$ は S^3 である。先に述べた通り $g_{\mathrm{H}}(S^3)=0$ である。ホップリンクの組ひも数は 2 であるから、$g_{\mathrm{braid}}(S^3) \leq 2$ である。一般に 3 次元多様体 M が $g_{\mathrm{bridge}}(M)=g_{\mathrm{braid}}(M)=1$ を満たすことの必要十分条件は $M=S^1 \times S^2$ であるということが知られている。よって $g_{\mathrm{bridge}}(S^3) \geq 2$ が得られる。従って次の不等式を得る。

$$g_{\mathrm{H}}(S^3)=0 \leq g_{\mathrm{bridge}}(S^3)=g_{\mathrm{braid}}(S^3)=2$$

このようにして S^3 と $S^1 \times S^2$ に対して 3 つの種数を求めることができた。ではレンズ空間に対してはどうかというのが、本稿の主な内容である。しかしレンズ空間に対しては Heegaard 種数が 1 となることは良く知られている。だから本稿ではレンズ空間に対して残りの 2 つの種数、すなわち橋種数と組ひも種数を計算する。

2 主定理とその証明

$L(p,q)$ と書けば (p,q) 型のレンズ空間を指すこととする。但し p、q は $p>q>0$ を満たす互いに素な整数である。このとき次の 2 つの定理が成り立つ。

定理 3
p を偶数とする。このとき次が成り立つ。

$$g_{\mathrm{bridge}}(L(p,1)) = g_{\mathrm{braid}}(L(p,1)) = 3$$

定理 4
p、q を偶数とする。このとき次が成り立つ。

$$g_{\mathrm{bridge}}(L(pq-1,q)) = g_{\mathrm{braid}}(L(pq-1,q)) = 4$$

各成分に整数をつけた絡み目を枠つき絡み目という。任意の 3 次元多様体はある枠つき絡み目の Dehn 手術により得られるということが知られている。0-手術は全ての係数が 0 の枠つき絡み目の Dehn 手術のことである。定理 3、4 の証明の為に次の補題を示す。

補題 1

$$g_{\mathrm{bridge}}(L(p,q)) \geq \begin{cases} 3 & (p: \text{偶数}) \\ 4 & (p: \text{奇数}) \end{cases}$$

補題 1 を示す為に絡み行列を定義する。

定義 (絡み行列)
$L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ を n 成分の全ての係数が 0 の枠つき絡み目とし $lk(K_i, K_j)$ を K_i と K_j の間の絡み数とする。このとき行列

$$\begin{bmatrix} 0 & lk(K_1,K_2) & \cdots & lk(K_1,K_n) \\ lk(K_2,K_1) & 0 & \cdots & lk(K_2,K_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ lk(K_n,K_1) & lk(K_n,K_2) & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

を枠つき絡み目 L の絡み行列という。

L の絡み行列は $\chi(L,0)$ の 1 次元ホモロジー群の表現行列と同値になることが知られている。このことを用いて補題 1 を示す。

補題 1 の証明

まずレンズ空間 $L(p,q)$ に対して $H_1(L(p,q)) = \mathbb{Z}_p$ である。任意の係数が 0 の枠つき結び目 K と全ての係数が 0 の 2 成分枠つき絡み目 L の絡み行列は、それぞれ $[0]$、$\begin{bmatrix} 0 & lk(K_1,K_2) \\ lk(K_2,K_1) & 0 \end{bmatrix}$ である。従って $H_1(\chi(K,0)) = \mathbb{Z}$、$H_1(\chi(L,0)) = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$ である。但し $n = lk(K_1,K_2) = lk(K_2,K_1)$ である。これより $\chi(K,0)$ や $\chi(L,0)$ は任意の $L(p,q)$ と同相になり得ないことが分かる。従って $g_{\mathrm{bridge}}(L(p,q)) \geq 3$ である。

次に p を奇数と仮定する。全ての係数が 0 の 3 成分枠つき絡み目 L' の絡み行列 A は $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ となる。ここで $a = lk(K_1,K_2)$、$b = lk(K_1,K_3)$、$c = lk(K_2,K_3)$ である。$\chi(L',0)$ が $L(p,q)$ と同相となるには $H_1(\chi(L',0)) = H_1(L(p,q))$ でなければならないから、A は $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ と同値でなければならない。A と B が同値な行列であれば $\det A = \det B$ であるから、$2abc = p$ である。しかし p が奇数であることから $2abc = p$ となる a、b、c は存在しない。従って p が奇数であれば $\chi(L',0)$ は任意の $L(p,q)$ と同相にはなり得ない。よって $g_{\mathrm{bridge}}(L(p,q)) \geq 4$ であり、補題 1 を得る。

枠つき絡み目に対し Kirby 変形という変形が存在する。この変形により移りあう枠つき絡み目から Dehn 手術により得られた多様体は互いに同相であるということが知られている。Kirby 変形の定義は項数の都合で割愛した [1]、[2] を参照されたい。定理 3、4 の証明はこの Kirby 変形を用いることで行う。

定理 3 の証明

補題 1 より $3 < g_{\mathrm{bridge}}(L(p,1))$ である。$g_{\mathrm{braid}}(L(p,1)) < 3$ を示す。図 1 の右のような自明な結び目を鎖のようにつないだ枠つき絡み目からは Dehn 手術によりレンズ空間 $L(p,q)$ が得られることが知られている。このとき各自明な結び目の係数を順に並べたものの連分数展開により $\dfrac{p}{q}$ が得られる。この p と q が $L(p,q)$ の p と q と一致するということが知られている。$\left[\dfrac{p}{2}, 0, \dfrac{p}{2}\right] = p$ より、右の枠つき絡み目からは $L(p,1)$ (但し p は偶数) が得られる。従って図 1 の 2 つの枠つき絡み目が Kirby 変形により移りあうことを示せば、左の枠つき絡み目より、すなわち組ひも数 3 の絡み目による 0-手術により S^3 から $L(p,1)$ が得られることが示せ、$g_{\mathrm{braid}}(L(p,1)) < 3$ が得られる。

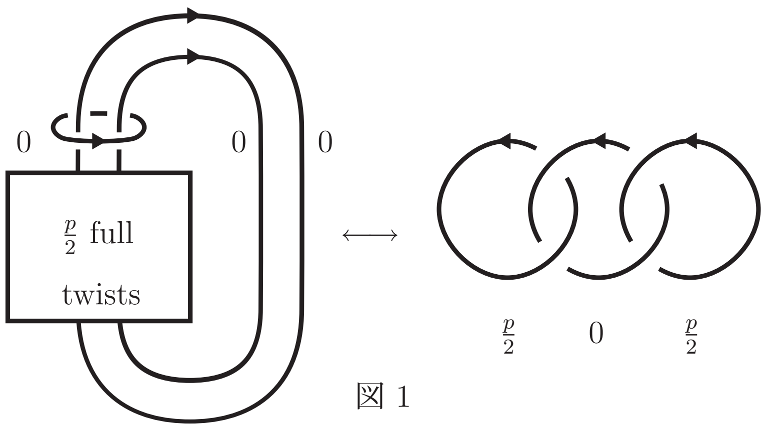


図 1

Kirby 変形により図 2 のような変形が行える。すなわち 2 本のひもを 0 を係数として持つ自明な結び目が束ねているとき、2 本のひもの間のフルツイストを解消することができる。このとき 2 本のひもの係数はフルツイストの方向に応じて ±1 される。

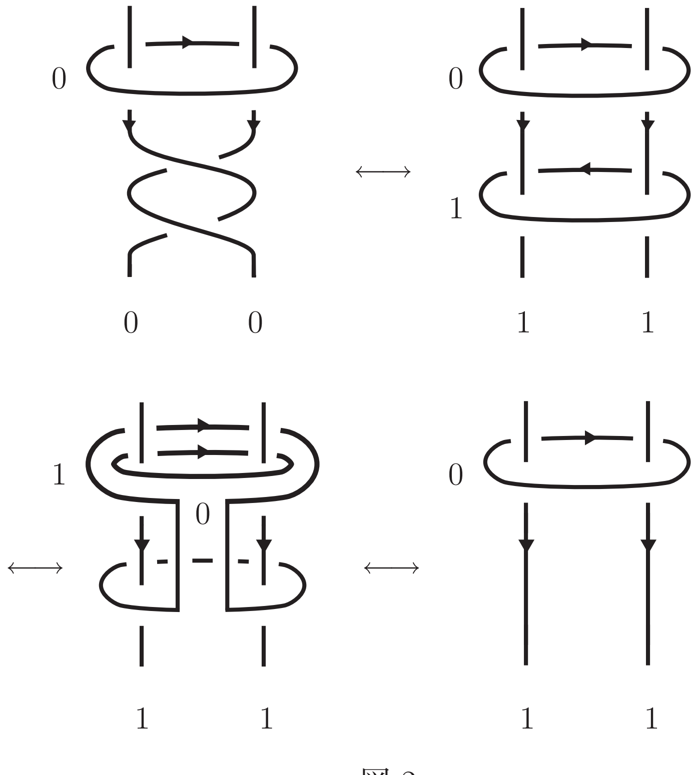


図 2

この図 2 の変形を図 1 の左の枠つき絡み目に $\frac{p}{2}$ 回行うことで、図 1 の右の枠つき絡み目が得られる。よって $g_{\mathrm{braid}}(L(p,1)) < 3$ であり、$g_{\mathrm{bridge}}(L(p,1)) = g_{\mathrm{braid}}(L(p,1)) = 3$ である。□

定理 4 の証明

証明の大筋は定理 3 の証明と同様である。最初に 3 本のひもを 0 を係数として持つ自明な結び目が束ねている場合を考える。この 3 本のひもの任意の 2 本の間にフルツイストがあるとき Kirby 変形により次のように変形できる。このとき 3 本のひもの係数はフルツイストがある 2 本がその方向により ± 1 残りの 1 本が ∓ 1 される。この変形で 3 本のひもの係数の偶奇が保たれることに注意しておく。

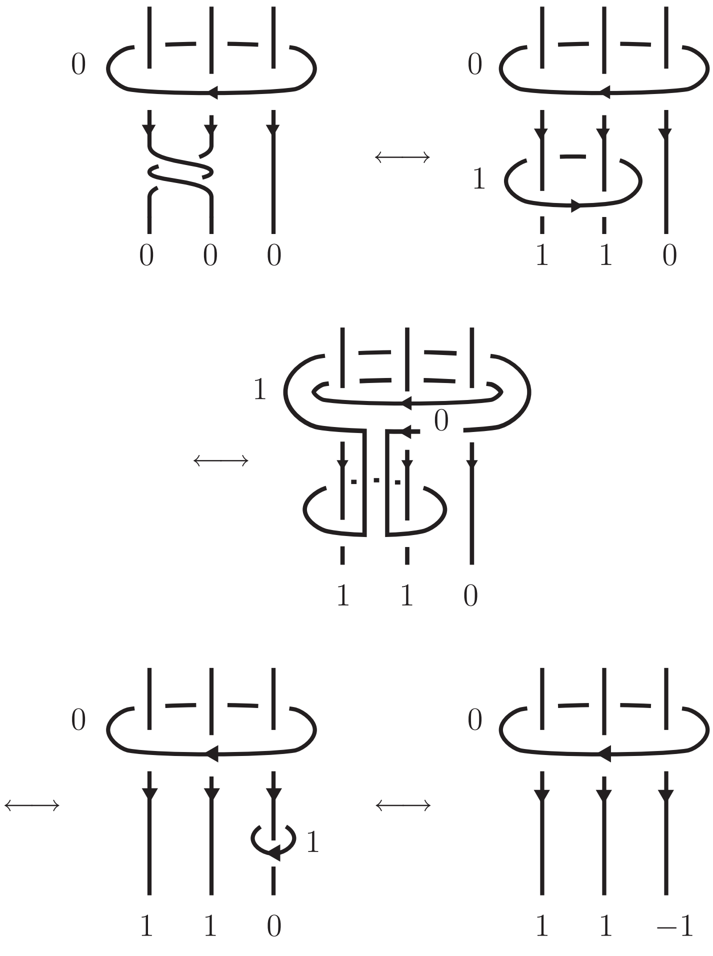


図 3

一般に純組ひもは任意の 2 本のひもの間のフルツイストにより生成されることが知られている。従って図 3 の変形を用いることで任意の偶奇が等しい整数 a、b、c に対して、図 4 の左の枠つき絡み目から右の枠つき絡み目が得られることが分かる。この右の枠つき絡み目からレンズ空間を構成することを考える。

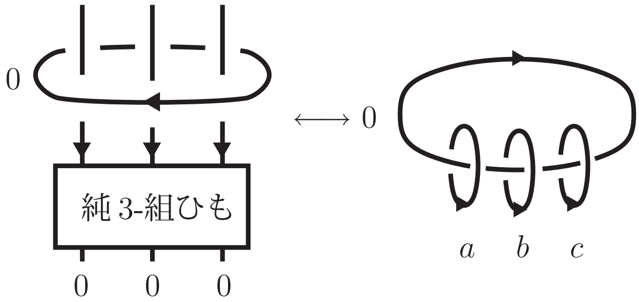


図 4

Kirby 変形により図 4 の右の枠つき絡み目から図 5 の右のような枠つき絡み目を得るには、$c = \pm 1$ を仮定する必要がある。今回は $+1$ とする。-1 としても証明は同様にできる。

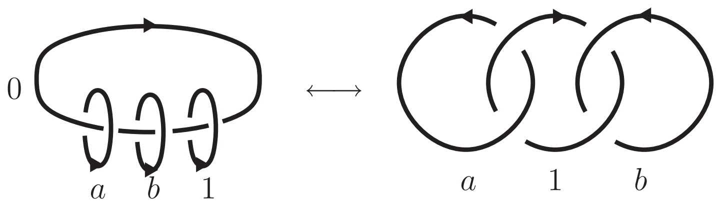


図 5

こうして図 5 の右のような枠つき絡み目が得られた。a、b、1 の偶奇は一致するから a と b は奇数である。この枠つき絡み目から得られるレンズ空間は $L(ab-a-b, b-1)$ であり、$p = a-1$、$q = b-1$ と整理すると $L(pq-1, q)$ が得られる (p、q は偶数)。従って $L(pq-1, q)$ は成分数 4 の絡み目から 0-手術により得られる。よって $g_{\mathrm{braid}}(L(pq-1,q)) < 4$ である。補題 1 より $4 < g_{\mathrm{bridge}}(L(pq-1,q))$ であるから、$g_{\mathrm{bridge}}(L(pq-1,q)) = g_{\mathrm{braid}}(L(pq-1,q)) = 4$ が得られる。□

References

[1] R. Fenn and C. Rourke, On Kirby's calculus of links, Topology Vol. 18, (1979), 1–15.

[2] R. Kirby, A calculus for framed links in S^3, Invent. Math. 45, (1978), 35–56.

Lens surgeries along Milnor links

門上晃久
大連理工大学応用数学系博士后
大阪市立大学兼任研究所員

2009 年 12 月 25 日
結び目の数学 II（於：早稲田大学 14 号館）

Abstract

We determine lens surgeries along a λ-component Milnor link with $\lambda \geq 3$. If $\lambda = 3$ (i.e. the Borromean rings), then there are three sequences for pairs of surgery coefficients yielding lens spaces. If $\lambda \geq 4$, then the link does not yield a lens space. We use the Reidemeister torsions to obtain necessary conditions. To prove insufficiency of the latter case, we use a result due to D. Gabai about minimal genus Seifert surfaces.

1 Introduction

Let $M_\lambda = K_1 \cup \cdots \cup K_\lambda$ be a λ-component Milnor link [Mi1, Mi2] (Figure 1). In particular, M_2 is the Hopf link, and M_3 is the Borromean rings. In this article, we assume $\lambda \geq 3$. Every Milnor link is a Brunnian link, more weakly, an algebraically split link.

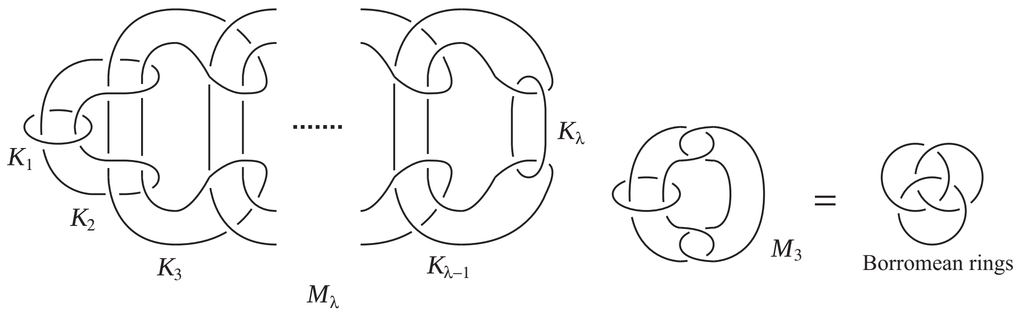


Figure 1: λ-component Milnor link M_λ

Let $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\lambda$ be a λ-component link. We denote the result of $(r_1, \ldots, r_\lambda)$-surgery along L by $(L; r_1, \ldots, r_\lambda)$ where $r_i \in \mathbb{Q} \cup \{\infty, \emptyset\}$ $(i = 1, \ldots, \lambda)$. If $r_i \in \mathbb{Q}$, then we set $r_i = p_i/q_i$ where $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ and $\gcd(p_i, q_i) = 1$. We obtain the following theorems:

Theorem 1.1 *A 3-manifold $Y = (M_3; p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3)$ is a lens space if and only if one of the following holds:*

(1) $(p_1/q_1, p_2/q_2) = (\varepsilon, \varepsilon)$ *and* $|\varepsilon p_3 - 6q_3| = 1$, *or*

(2) $(p_1/q_1, p_2/q_2) = (\varepsilon, 2\varepsilon)$ *and* $|\varepsilon p_3 - 4q_3| = 1$, *or*

(3) $(p_1/q_1, p_2/q_2) = (\varepsilon, 3\varepsilon)$ *and* $|\varepsilon p_3 - 3q_3| = 1$,

and their permutations of indices where $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Moreover, if (1), then* $Y = L(p_3, 4\varepsilon q_3)$, *if (2), then* $Y = L(2p_3, \varepsilon(8q_3 - p_3))$, *and if (3), then* $Y = L(3p_3, \varepsilon(3q_3 - 2p_3))$.

Theorem 1.2 *For* $\lambda \geq 4$, M_λ *does not yield a lens space.*

We obtain necessary conditions to yield lens spaces in the theorems above by the Alexander polynomials of M_λ as follows:

$$\begin{aligned} \Delta_{M_3}(t_1, t_2, t_3) &\doteq (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1), \\ \Delta_{M_\lambda}(t_1, \ldots, t_\lambda) &= 0 \qquad (\lambda \geq 4), \end{aligned}$$

and the Reidemeister torsions. To show sufficiency of the condition in the Theorem 1.1 case, we use Rolfsen moves [Ro]. To show insufficiency of the condition in the Theorem 1.2 case, we use results due to Y. Ni [Ni] (Theorem 5.2) about relation between lens surgeries on knots and fiberedness, and D. Gabai [Ga] (Theorem 5.4) about minimal genus Seifert surfaces.

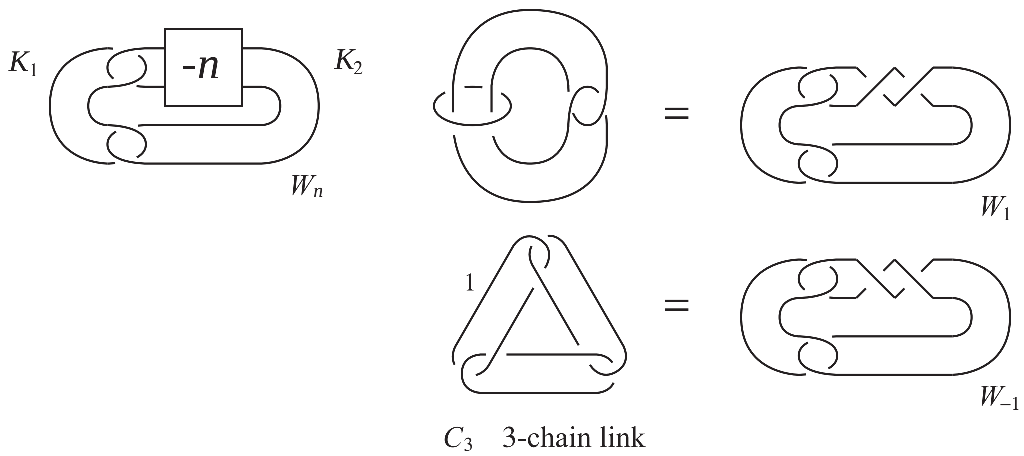


Figure 2: n-twisted Whitehead link W_n

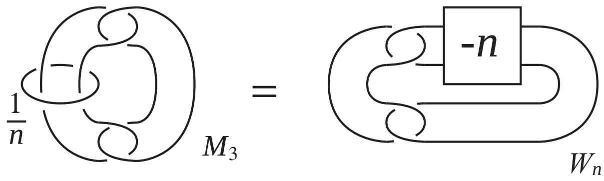


Figure 3: relation between M_3 and W_n

2 Surgery formulae of Reidemeister torsion

Let X be a finite CW complex with $H = H_1(X)$, R an integral domain, and $\psi : \mathbb{Z}[H] \to R$ a ring homomorphism. Then $\tau^{\psi}(X) \in Q(R)$ is the *Reidemeister torsion* of X related with ψ which is determined up to multiplication of $\pm\psi(h)$ $(h \in H)$ (cf. [Tr1, Tr2]). For A and $B \in Q(R)$, we denote $A \doteq B$ if $A = \pm\psi(h)B$ for some $h \in H$. If ψ is the identity map, then we denote $\tau(X) := \tau^{\psi}(X)$.

Proposition 2.1 *(1) We set $H_1(S^1) = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$. Then we have $\tau(S^1) \doteq (t-1)^{-1}$.*

(2) We set $H_1(S^1 \times S^1) = \langle t_1, t_2 \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Then we have $\tau(S^1 \times S^1) \doteq 1$.

(3) Let $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\lambda$ be a λ-component link in an integral homology 3-sphere, and E_L the complement of L. We set $H_1(E_L) = \langle t_1, \ldots, t_\lambda \rangle \cong \mathbb{Z}^\lambda$. Then we have

$$\tau(E_L) \doteq \begin{cases} \dfrac{\Delta_K(t)}{t-1} & (\lambda = 1), \\ \Delta_L(t_1, \ldots, t_\lambda) & (\lambda \geq 2), \end{cases}$$

where $K = L$ and $t = t_1$ if $\lambda = 1$.

Lemma 2.2 (surgery formula I) *Let E be a compact 3-manifold with tori boundary, V a solid torus with core ℓ, and $Y = E \cup V$ a Dehn filling, and $\iota_E : E \hookrightarrow Y$ and $\iota_V : V \hookrightarrow Y$ the natural inclusions. Let F be a field, $\psi : \mathbb{Z}[H_1(Y)] \to F$ a ring homomorphism, and $\psi_E := \psi \circ (\iota_E)_*$ and $\psi_V := \psi \circ (\iota_V)_*$ ring homomorphisms where $(\iota_E)_*$ and $(\iota_V)_*$ are the induced homomorphisms by ι_E and ι_V, respectively. If $\tau^{\psi_E}(E) \neq 0$ and $\psi_V([\ell]) \neq 1$, then we have*

$$\tau^{\psi}(Y) \doteq \tau^{\psi_E}(E) \cdot (\psi_V([\ell]) - 1)^{-1} \, (\neq 0).$$

Let H be a finite cyclic group with order $p \geq 2$, and t a generator. For a divisor $d \geq 2$ of p, let ζ_d be a primitive d-th root of unity, $\psi_d : \mathbb{Z}[H] \to \mathbb{Q}(\zeta_d)$ a ring homomorphism such that $\psi_d(t) = \zeta_d$.

Lemma 2.3 (surgery formula II)

(1) Let $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\lambda$ be a λ-component link with $\lambda \geq 2$, ℓ'_i $(i = 1, \ldots, \lambda)$ a core of attaching solid torus, and Y a result of Dehn surgery along L with $\sharp(H_1(Y)) \geq 2$. Let F be a field, and $\psi : \mathbb{Z}[H_1(Y)] \to F$ a ring homomorphism. If $\psi([\ell'_i]) \neq 1$ $(i = 1, \ldots, \lambda)$, then we have

$$\tau^{\psi}(Y) \doteq \Delta_L(\psi([m_1]), \ldots, \psi([m_\lambda])) \cdot \prod_{i=1}^{\lambda} (\psi([\ell'_i]) - 1)^{-1}.$$

(2) Let K be a knot, $Y = (K; p/q)$ $(p \geq 2)$ the result of p/q-surgery along K, and $H_1(Y) = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Then we have

$$\tau^{\psi_d}(Y) \doteq \Delta_K(\zeta_d)(\zeta_d - 1)^{-1}(\zeta_d^{\bar{q}} - 1)^{-1}$$

where $q\bar{q} \equiv 1 \pmod{p}$.

For example, we have

$$\tau^{\psi_d}(L(p, q)) \doteq (\zeta_d - 1)^{-1}(\zeta_d^{\bar{q}} - 1)^{-1}.$$

3 Key Lemmas

Let L be a λ-component algebraically split link with $\lambda \geq 2$. Then the Alexander polynomial of L is of the form:

$$\Delta_L(t_1, \ldots, t_\lambda) \doteq (t_1 - 1) \cdots (t_\lambda - 1) f(t_1, \ldots, t_\lambda)$$

where $f(t_1, \ldots, t_\lambda) = f(t_1^{-1}, \ldots, t_\lambda^{-1}) \in \mathbb{Z}[t_1^{\pm}, \ldots, t_\lambda^{\pm}]$.

We set $M = (L; p_1/q_1, \ldots, p_\lambda/q_\lambda)$. Then $H_1(M) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ with $p \geq 2$ if and only if $p = |p_1 \cdots p_\lambda| \geq 2$ and $\gcd(p_i, p_j) = 1$ $(1 \leq i \neq j \leq \lambda)$. We assume $q_i \neq 0$ $(i = 1, \cdots, \lambda)$.

For fixed i, we set $f_i := f(1, \ldots, 1, t_i, 1, \ldots, 1)|_{t_i = \zeta_d}$ which is obtained by substituting $t_i = \zeta_d$ and $t_j = 1$ $(j \neq i)$. Then we have the following:

Lemma 3.1 *Under the situation above, for a divisor $d \geq 2$ of p_i, we have*

$$\tau^{\psi_d}(M) \doteq \left\{ f_i \cdot q_1 \cdots \hat{q}_i \cdots q_\lambda (\zeta_d - 1)^2 + \eta \cdot p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_\lambda \zeta_d \right\} \cdot (\zeta_d - 1)^{-1}(\zeta_d^{\bar{q}_i} - 1)^{-1}$$

where $q_i\bar{q}_i \equiv 1 \pmod{p_i}$, and $\eta = 1$ or -1.

Lemma 3.2 *Suppose M above is a lens space. Then we have the following:*

(1) If $|f_i| = 1$ and $|p_i| \geq 5$, then we have $|q_1| = \cdots = |\hat{q}_i| = \cdots = |q_\lambda| = 1$, and $|p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_\lambda| = 1$ or 2 or 3.

(2) If $|f_i| = 0$, then we have $|p_1| = \cdots = |\hat{p}_i| = \cdots = |p_\lambda| = 1$.

Lemma 3.3 [MP, KMS] *Let* W_ε $(\varepsilon = \pm 1)$ *is the Whitehead link as in Figure 2. Then* $(W_\varepsilon; p_1/q_1, p_2/q_2)$ *is a lens space if and only if one of the following holds:*

(1) $p_1/q_1 = \varepsilon$ *and* $|\varepsilon p_2 - 6q_2| = 1$, *or*

(2) $p_1/q_1 = 2\varepsilon$ *and* $|\varepsilon p_2 - 4q_2| = 1$, *or*

(3) $p_1/q_1 = 3\varepsilon$ *and* $|\varepsilon p_2 - 3q_2| = 1$, *and their permutations of indices.*

4 Proof of $\lambda = 3$ case

Suppose $1 \leq |p_1| < |p_2| < |p_3|$. By Lemma 3.2 (1), the proof is divided into two cases:

(i) $|p_3| \geq 5$ case

By Lemma 3.2 (1), we have $p_1 = \varepsilon$. Hence by Lemma 3.3, we have the result.

(ii) $|p_3| \leq 4$ case

By Lemma 3.2 (1), we can use the same technique as in [KMS]. □

5 Proof of $\lambda \geq 4$ case

Suppose $|p_i| \geq 2$ for fixed i. By Lemma 3.2 (2), we may assume $p_j = 1$ $(j \neq i)$. Let $\overline{K_i}$ the resulting knot by $1/q_j$-surgery along K_j $(j \neq i)$. We note that $\overline{K_i}$ is a knot in S^3.

Lemma 5.1 $\Delta_{\overline{K_i}}(t) \doteq 1$.

Theorem 5.2 [Ni] *If a knot* K *in* S^3 *yields a lens space, then* K *is fibered.*

By this theorem, existence of lens surgery along $\overline{K_i}$ is equivalent to triviality of $\overline{K_i}$.

Remark 5.3 Casson-Walker invariant [Wa] cannot detect it.

Theorem 5.4 [Ga] *Let* F *be a Seifert surface of a link* L *which is a Murasugi sum of two surfaces* F_1 *and* F_2. *Then* F *is a minimal genus Seifert surface of* L *if and only if both* F_1 *and* F_2 *are minimal genus Seifert surfaces of links.*

Proof of Theorem 1.2 ($\lambda = 4$ case) Let F be a genus 1 Seifert surface of M_4 as in Figure 4. Then F is a plumbing of F_1 and F_2 in Figure 4. Since ∂F_1 is a non-trivial $(2, -2q_2)$-torus link, F_1 is a minimal genus Seifert surface. Since $\partial F_1 = K_1' \cup K_2'$ is a parallel of a non-trivial 2-bridge knot $C(-2q_3, 2q_4)$, F_2 is a minimal genus Seifert surface. By Theorem 5.4, F is a minimal genus Seifert surface, and hence $\overline{K}_1$ is a non-trivial knot. □

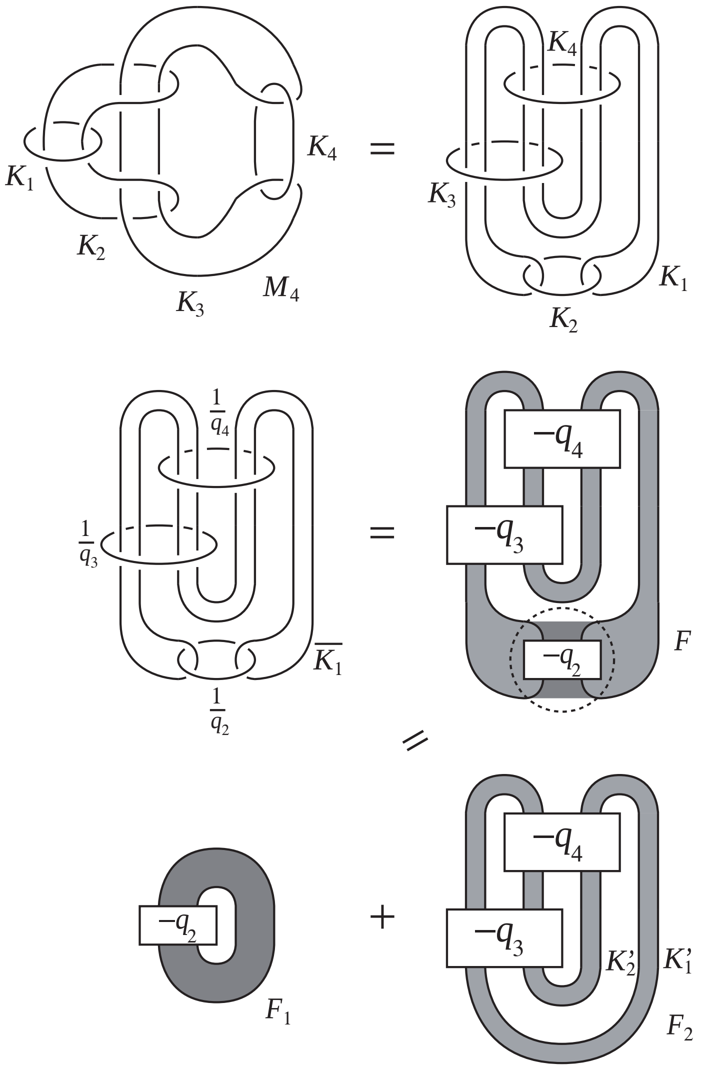


Figure 4: minimal genus Seifert surface for $(M_4; \emptyset, 1/q_2, 1/q_3, 1/q_4)$

6 Further Remarks

We have further comments concerning our results, and raise a conjecture.

Problem 6.1 (Property P (R, and L, respectively) problem for links) *Characterize framed links which represent S^3 ($S^2 \times S^1$, and $L(p,q)$, respectively).*

Remark 6.2 A λ-component Milnor link with $\lambda \geq 4$ does not yield S^3 and $S^2 \times S^1$.

Conjecture 6.3 *A non-split λ-component Brunnian link with $\lambda \geq 4$ whose Milnor's $\overline{\mu}$-invariant is non-zero does not yield S^3 ($S^2 \times S^1$, and $L(p,q)$, respectively).*

Akio Kawauchi pointed out that if we remove the condition "whose Milnor's $\overline{\mu}$-invariant is non-zero", then a counterexample can be constructed by using (his) "imitation theory".

Acknowledgement 講演の機会を与えていただいた主催者 花木良様、谷山公規様に感謝します。

References

[Ga] D. Gabai, *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Amer. Math. Soc. Comtemp. Math., **20** (1983), 131–143.

[KMS] T. Kadokami, N. Maruyama and M. Shimozawa, *Lens surgeries along the n-twisted Whitehead link*, preprint.

[MP] B. Martelli and C. Petronio, *Dehn filling of the "magic" 3-manifold*, Comm. Anal. Geom., **14**, No. 5 (2006), 969–1026.

[Mi1] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 177–195.

[Mi2] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 280–306, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

[Ni] Y. Ni, *Knot Floer homology detects fibered knots*, Invent. Math., **170** (2007), 577–608.

[Ro] D. Rolfsen, *Rational surgery calculus: extension of Kirby's theorem*, Pacific J. Math., **110**, (1984), 377–386.

[Tr1] V. G. Turaev, *Reidemeister torsion in knot theory*, Russian Math. Surveys, **41-1** (1986), 119–182.

[Tr2] V. G. Turaev, *Introduction to Combinatorial Torsions*, Birkhäuser Verlag (2001).

[Wa] K. Walker, *An extension of Casson's invariant*, Ann. of Math. Stud., **126**, Princeton University Press, (1992).

KADOKAMI Teruhisa
Department of Applied Mathematics,
Dalian University of Technology
Dalian-si, Liaoning-sheng, 116024, China
kadokami@dlut.edu.cn
kadokami2007@yahoo.co.jp

Parameterization of knot tunnels and its application

石原 海 (埼玉大学大学院理工学研究科)

1 はじめに

Cho-McCullough [CM1] は，tunnel number one knot $K \subset S^3$ とその unknotting tunnel τ の組 (K, τ) について, 有理数の列と 0,1 の列による parameterization を与えている．また彼らは，[CM1] において 2-bridge knot とその unknotting tunnel について，[CM2] において torus knot とその unknotting tunnel について，それぞれ parameter を求めている．

ここでは，parameterization について cabling construction を用いて説明するとともに，実際に parameter を求める．具体的には，定理 7.1 において，(p, q)-torus knot の平行な 2 本の紐に r 回の half twist を加えて得られる twisted torus knot $T(p, q, r)$ とその 1 つの unknotting tunnel（図 9 参照）について parameter を求める．またその応用として次を得る．

定理 1.1. $3 \leq p < q$ なる自然数 p, q と偶数 r に対して，次を除いて *twisted torus knot* $T(p, q, r)$ は *torus knot* でも *2-bridge knot* でもない．

$T(3,5,-6) = T(3,4,-4) = S(7,2) \quad (5_2\text{-}knot)$,
$T(3,5,-4) = T(3,4,-2) = T(2,5) \quad (5_1\text{-}knot)$,
$T(3,3m+2,-2) = T(3,3m+1)$,
$T(3,3m+1,2) = T(3,3m+2)$.

さらに森本氏 [Mo] によって示された，$T(p, q, r)$ はすべて small である（exterior に closed essential surface を含まない）ことを用いれば次が分かる．

定理 1.2. $3 \leq p < q$ なる自然数 p, q と偶数 r に対して，次を除いて *twisted torus knot* $T(p, q, r)$ は *hyperbolic knot* である．

$T(3,5,-4) = T(3,4,-2) = T(2,5) \quad (5_1\text{-}knot)$,
$T(3,3m+2,-2) = T(3,3m+1)$,
$T(3,3m+1,2) = T(3,3m+2)$.

2 Tunnel number one knots

結び目 K と K に端点のみで交わる arc τ について，$E(K \cup \tau)$ が handlebody と同相であるとき，K を *tunnel number one knot*，τ を K の *unknotting tunnel* とよぶ．ここでは unknotting tunnel を図 1 のように点線で表すことにする．結び目 K を固定し，2 つの unknotting tunnels について isotopic または homeomorphic の同値関係を考えるのが慣例であるが，ここでは結び目とその unknotting tunnel の組に同値関係を導入する．すなわち，結び目とその unknotting tunnel の 2 組 (K, τ) と (K', τ') に対して，向きを保つ同相写像 f で $f(K) = K'$ かつ $f(E(K) \cap \tau) = E(K') \cap \tau'$ を満たすものが存在するとき，(K, τ) と (K', τ') は同値であるといい，この同値関係における同値類を *tunnel* とよぶ．図 1 では 1 と 2，3 と 5 はそれぞれ同値であるが，3 と 4 は同値でない．

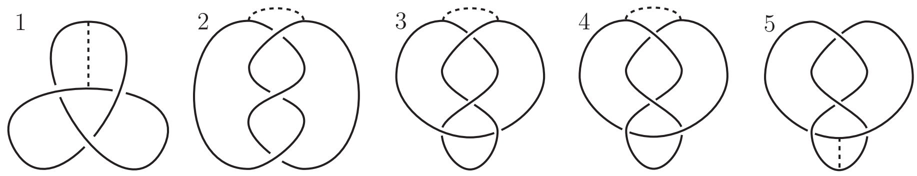


図 1: 結び目とその unknotting tunnel の例

3 Cabling construction and parameterization of tunnels

結び目とその unknotting tunnel の組に関する parameterization を，ここでは cabling construction によって与える．これから準備する cabling construction とはある tunnel から別の tunnel を構成する作業である．結び目 K とその unknotting tunnel τ に対して，その和集合 $K \cup \tau$ を θ とおく．このとき $\theta = \lambda \cup \rho \cup \tau$ とできる．ただし，λ と ρ はそれぞれ arc で $K = \lambda \cup \rho$ となっている．cabling において結び目を構成する arc λ もしくは ρ の近傍を取り替える．どちらでも同様なのでここでは λ の近傍 $N(\lambda)$ について考える．今 $(N(\lambda), N(\lambda) \cap \theta)$ は，有理タングル $(N(\lambda), N(\lambda) \cap (\rho \cup \tau))$ に arc λ を加えて得られる．そこで $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して，r-tangle を (B^3, t_r)，r-tangle に 1 つ arc を加えて得られる $(N(\lambda), N(\lambda) \cap \theta)$ に同相なタングルを $(B^3, \tilde{t}_r)$ で表すこととする．

定義 3.1 (cabling)**.** θ を次の条件を満たすように固定する．

- $(N(\lambda), N(\lambda) \cap \theta) = (B^3, \tilde{t}_\infty)$
- K_0 は 2 成分絡み目で $\mathrm{lk}(K_0) = 0$，ただし，$r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して $K_r := (\theta - \tilde{t}_\infty) \cup t_r$ とおく．

このとき (K, τ) から $(K_r, \tilde{t}_r - t_r)$ を得る作業を slope r の *cabling* とよび，$(K, \tau) \overset{r}{\rightsquigarrow} (K_r, \tilde{t}_r - t_r)$ で表すことにする．

この cabling で得られた $(K_r, \tilde{t}_r - t_r)$ は，r の分子が奇数のとき結び目と unknotting tunnel の組になり，r の分子が偶数のとき絡み目と unknotting tunnel の組になっている．ここでは結び目の tunnel のみを考えているので，r の分子は奇数とする．

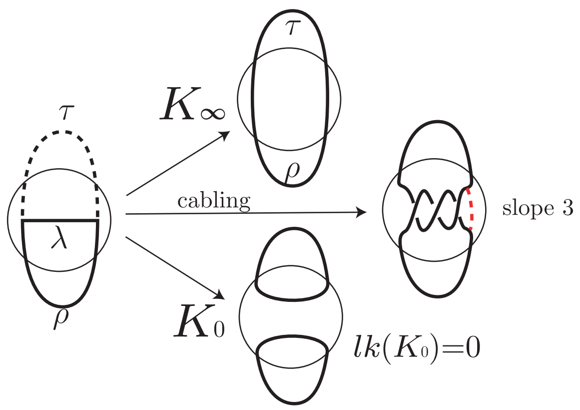


図 2: Slope 3 の cabling

次の定理は，すべての tunnel が自明な結び目の tunnel から cabling construction で得られることを示している．

定理 3.2 (Cho-McCullough [CM1])**.** 任意の *tunnel number one knot* K とその *unknotting tunnel* τ の組 (K,τ) に対して，(K,τ) に同値な組 (K_n,τ_n) が存在し，(K_n,τ_n) は自明な結び目 U とその *unknotting tunnel* τ_U の組 (U,τ_U) から $n+1$ 回の *cabling* の列 $(U,\tau_U) \overset{\frac{q_0}{p_0}}{\rightsquigarrow} (K_0,\tau_0) \overset{\frac{q_1}{p_1}}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{\frac{q_n}{p_n}}{\rightsquigarrow} (K_n,\tau_n)$ で構成できる．ただし，$U \cup \tau_U$ は平面上にのる *θ-curve* とする．

この cabling の列 $(U,\tau_U) \overset{\frac{q_0}{p_0}}{\rightsquigarrow} (K_0,\tau_0) \overset{\frac{q_1}{p_1}}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{\frac{q_n}{p_n}}{\rightsquigarrow} (K_n,\tau_n)$ は，それぞれの cabling の slope $\frac{q_i}{p_i}$ と，cabling の際 K_{i-1} を構成する 2 つの arcs のうちどちらを取り替えるかによって特徴付けられる．そこで，それぞれの cabling $(K_{i-1},\tau_{i-1}) \overset{\frac{q_i}{p_i}}{\rightsquigarrow} (K_i,\tau_i)$ において，ρ_{i-1} を固定し λ_{i-1} を τ_i に取り替えることとする．ただし，λ_{i-1} と ρ_{i-1} はそれぞれ K_{i-1} を構成する arc で $K_{i-1} \cup \tau_{i-1} = \lambda_{i-1} \cup \rho_{i-1} \cup \tau_{i-1}$ となっている．このとき $i \in \{2,3,\ldots,n\}$ に対して，ρ_{i-1} が ρ_{i-2} に対応していれば $s_i = 0$，そうでなければ $s_i = 1$ と定義できる．すると，この cabling の列，もしくは (K_n,τ_n) は，$((\frac{p_0}{p_0},\frac{q_1}{p_1},\cdots,\frac{q_n}{p_n}),(s_2,\ldots,s_n))$ によって決定される．Cho-McCullough [CM1] は，逆に tunnel に対して，$(([\frac{p_0}{q_0}],\frac{q_1}{p_1},\cdots,\frac{q_n}{p_n}),(s_2,\ldots,s_n))$ が一意的に決定される（cabling construction が tunnel に対して一意的である）ことを示している．ただし，$[\frac{p_0}{q_0}] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ である．そこで，$(([\frac{p_0}{q_0}],\frac{q_1}{p_1},\cdots,\frac{q_n}{p_n}),(s_2,\ldots,s_n))$ を tunnel (K,τ) の *parameter* とよぶことにする．

4 Tunnel of $(1,1)$-knot

結び目 K に対して，S^3 の genus 1 Heegaard splitting $S^3 = V_1 \cup V_2$ で，$i \in \{1,2\}$ に対して $K \cup V_i$ が trivial arc（∂V_i に平行な arc）となるものが存在するとき，K を $(1,1)$-*knot* という．このとき，図 3 の点線で描かれた 2 つの arcs のように solid torus V_i の core に対応するものはどちらも unknotting tunnel になり，これを $(1,1)$-*tunnel* とよぶ．このことから $(1,1)$-knot は tunnel number one knot であることがわかる．簡単な結び目の tunnel は大抵が $(1,1)$-tunnel である．定義から $(1,1)$-tunnel は $(1,1)$-knot の tunnel であることがわかるが，逆に $(1,1)$-knot のすべての tunnel が $(1,1)$-tunnel であるとは限らない．実際 torus knot はすべて $(1,1)$-knot であるが，$(1,1)$ でない（middle）tunnel を持つ torus knot は無数にある（系 6.3 参照）．また torus knot 以外のそのような例は合田氏-林氏 [GH] によって挙げられており，系 7.2 ではそれを拡張している．

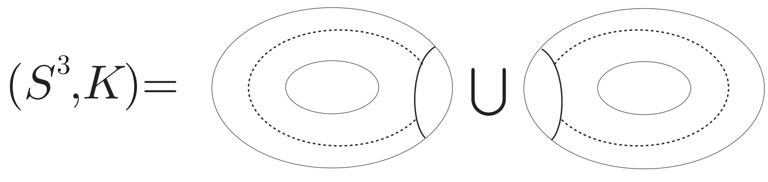


図 3: $(1,1)$-knot の $(1,1)$-tunnel

次の定理は，tunnel が $(1,1)$-tunnel か否かの判定が，その tunnel の parameter からできることを示している．

定理 4.1 (Cho-McCullough)**.** $(([\frac{p_0}{q_0}],\frac{q_1}{p_1},\cdots,\frac{q_n}{p_n}),(s_2,\ldots,s_n))$ を *tunnel* (K,τ) の *parameter* とする．(K,τ) が $(1,1)$-*tunnel* であることと，$s_2 = \ldots = s_n = 0$ もしくは $n \leq 1$ であることが同値である．

つまり $(1,1)$ でない tunnel について，自明な結び目の tunnel からの cabling construction を考えると，少なくとも 3 回以上の cabling が必要であることがわかる．

5　Tunnel of 2-bridge knot

2-bridge knot の unknotting tunnel に関しては小林氏 [K1, K2]，森本氏-作間氏 [MS]，内田氏 [U] によって研究されており，1 つの 2-bridge knot に関して図 4 のような高々4 つの tunnels しかないことがわかる．2-bridge knot の tunnel のうち upper tunnel または lower tunnel とよばれるもの（図 4 の左端と右端の tunnel）は，自明な結び目とその unknotting tunnel から 1 回の cabling で得られることがわかる．これは 2-bridge knot の upper（lower） tunnel の parameter は長さ 1，つまり $[\frac{p_0}{q_0}]$ の形であることを示している．

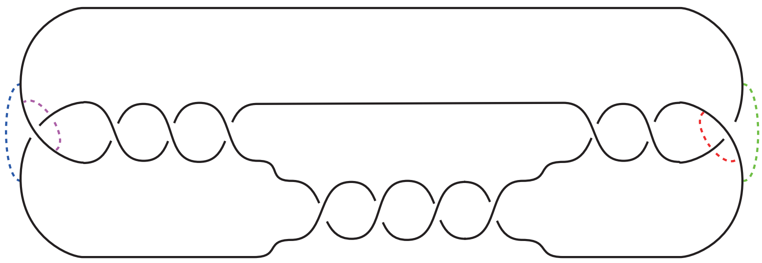


図 4: 2-bridge knot の 4 つの tunnel

Cho-McCullough は，残りの 2-bridge knot の tunnel に関しても parameter を計算している．2-bridge knot を図 5 のように表示する．ただし，任意の $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対して $a_i = \pm 1$，$b_n \neq 0$ で $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ に対して $b_i = 0$ ならば $a_i a_{i+1} = 1$，さらに $b_n = \pm 1$ ならば $a_n b_n = 1$ とする．

定理 5.1 (Cho-McCullough [CM1])．図 5 の *tunnel* の *parameter* は，
$(([\frac{1}{2+1/k_n}], 2\varepsilon_{n-1} + 1/k_{n-1}, \ldots, 2\varepsilon_1 + 1/k_1), (0,\ldots,0))$ である．ただし，$\varepsilon_i = a_{i+1}(-1)^{b_n+1}$ $(=\pm 1)$，$k_n = \begin{cases} b_n & (a_n = 1) \\ b_n - 1 & (a_n = -1) \end{cases}$，$k_i = \begin{cases} 2b_i + a_i & (a_i a_{i+1} = 1) \\ 2b_i & (a_i a_{i+1} = -1) \end{cases}$ とする．

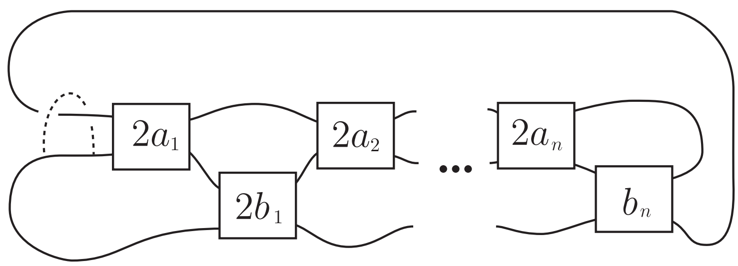


図 5: 2-bridge knot の tunnel

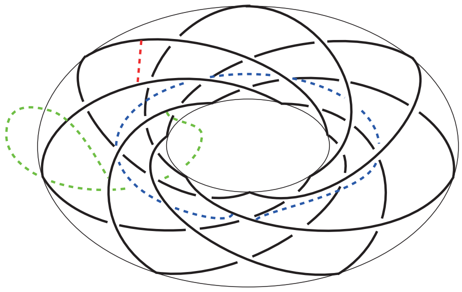


図 6: Torus knot の tunnel

6 Tunnel of torus knot

Boileau-Rost-Zieschang [BRZ] により，1 つの torus knot に関して図 6 のような 3 つの tunnels しかないことがわかる．Cho-McCullough [CM2] はこの torus knot の tunnel に関しても parameter を計算している．ただし，下の定理 6.1，6.2 では，[CM2, Theorem 1.1, 1.2] での slope にすべて "$-$" が付いている．これは，ここで (p,q)-torus knot といっているものが，[CM2] でのそれと鏡像の関係にあることによる．例えば図 6 の結び目を，ここでは $(5,7)$-torus knot と考えているが，[CM2] では $(5,-7)$-torus knot と考えている．図 7，8 において，p,q は互いに素な整数で $p,q \geq 2$ とし，$\boxed{(p,q)}$ は p 次の (p,q)-torus braid を表している．図 7 の tunnel は (p,q)-torus knot の upper tunnel とよばれる．ちなみに，(p,q)-torus knot の lower tunnel は (q,p)-torus knot の upper tunnel である．また，図 8 のように unknotting tunnel が torus knot ののっている standard torus 上にあるものは middle tunnel とよばれる．

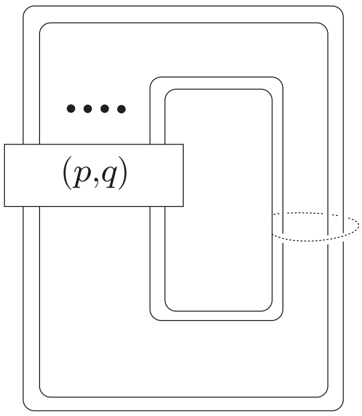


図 7: (p,q)-torus knot の upper tunnel

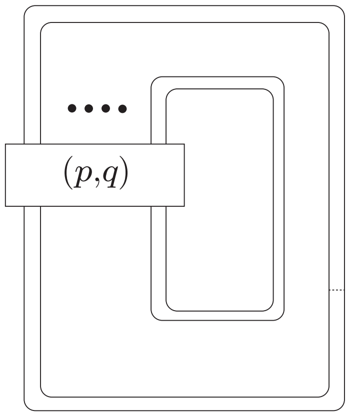


図 8: (p,q)-torus knot の middle tunnel

定理 6.1 (Cho-McCullough [CM2])**.** 図 7 の *tunnel* の *parameter* は，
$(-([\frac{1}{2p_{k_0}-1}], 2p_{k_0+1}-1, \dots, 2p_{q-1}-1), (0, \dots, 0))$ である．ただし，$p_k = \lceil kp/q \rceil = \min\{j \mid jq/p \geq k\}$，$k_0 = \min\{k \mid p_k > 1\}$ とする．

定理 6.2 (Cho-McCullough [CM2])**.** $2 \leq p < q$ で，$q/p = [n_1, n_2, \dots, n_k]$ と自然数 n_j（$n_k \neq 1$）によって連分数展開が与えられているとする．このとき，図 8 の *tunnel* の *parameter* は，
$(-([\frac{1}{2n_1+1}], a_1d_1+b_1c_1, \dots, a_Nd_N+b_Nc_N), (s_2, \dots, s_N))$ である．ただし，a_t, b_t, c_t, d_t, s_t は以下のよ

うにして決まる整数である．まず $l \in \{0,1,\dots k\}$ に対して $N_l := -n_1 + \sum_{j=1}^{l} n_j$，$N := N_k - 2$ とおき，$i \in \{-n_1, 1-n_1, \dots N\}$ に対して次のように行列 A_i を決める．$A_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & N_{2l'} \leq i < N_{2l'+1} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & N_{2l'+1} \leq i < N_{2l'+2} \end{cases}$.

そして $t \in \{1,2,\dots,N\}$ に対して a_t, b_t, c_t, d_t, s_t が以下で決定される．

$$M_t = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix} = \prod_{j=t}^{-n_1} A_j = A_t A_{t-1} \cdots A_{-n_1}, \quad s_t = \begin{cases} 0 & A_t = A_{t-1} \\ 1 & A_t \neq A_{t-1} \end{cases}.$$

Boileau-Rost-Zieschang [BRZ] により，torus knot の tunnel については完全な分類がなされているが，この Cho-McCullough の parameter の計算により別証明が与えられる．しかし，この parameter の計算から tunnel が高々3 つであることを証明することはできない．

系 6.3. $2 \leq p < q$ とする．

- $q - p = 1$ のとき，$T(p,q)$ の *upper*，*lower*，*middle tunnel* はすべて一致する．
- $q - p \neq 1$，$q \equiv \pm 1 \pmod{p}$ のとき，$T(p,q)$ の *middle tunnel* は *upper tunnel* と一致するが，*lower tunnel* とは一致しない．
- $q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ のとき，*upper*，*lower*，*middle tunnel* はすべて異なる *tunnel* である．特に *middle tunnel* は $(1,1)$-*tunnel* ではない．

7 Parameter of tunnel of twisted torus knot

図 9 の点線の arc が unknotting tunnel になることから，$T(p,q,r)$ はすべて tunnel number one knot であることがわかる．ここまでに登場した結び目は，すべて $(1,1)$-knot であったが，$m \in \mathbb{Z}$ に対して $T(7,17,10m-4)$ は $(1,1)$-knot でないことが森本氏-作間氏-横田氏 [MSY] によって示されている．また，$r = \pm 2$ のとき $T(p,q,r)$ は $(1,1)$-knot であることもわかる．$(1,1)$-knot もそうでない結び目も含むことから，このクラスを扱うことは，tunnel を考える上で重要である．ここでは図 9 の tunnel の parameter を求める．またその応用として，定理 1.1 の証明の概略を与える．

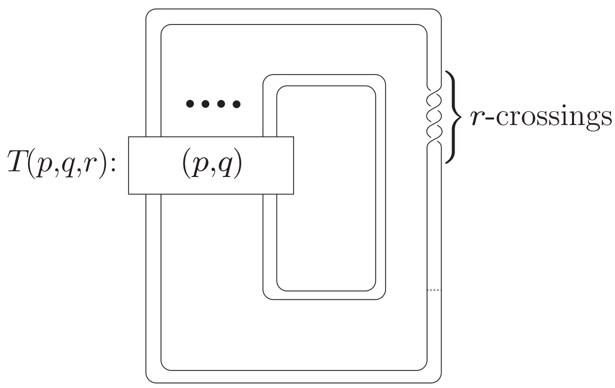


図 9: Twisted torus knot $T(p,q,r)$ の tunnel

定理 7.1. $(([\frac{1}{r_0}], r_1, \cdots, r_n), (s_2, \ldots, s_n))$（$r_i$ は奇数）を (p,q)-*torus knot* $T(p,q)$ の *middle tunnel* の *parameter* とすると，図 9 の *twisted torus knot* $T(p,q,r)$ の *tunnel* の *parameter* は，
$(([\frac{1}{r_0}], r_1, \cdots, r_{n-1}, r_n - r), (s_2, \ldots, s_n))$ である．

この定理は，torus knot $T(p,q)$ の middle tunnel について cabling construction を考えたとき，最後の cabling の slope を r_n から $r_n - r$ に換えることで，図 9 の tunnel が得られることを示している（図 10 参照）．ちなみに，定理 6.2 からわかるが，torus knot の middle tunnel は torus knot の middle tunnel だけを経由する cabling construction で得られる．

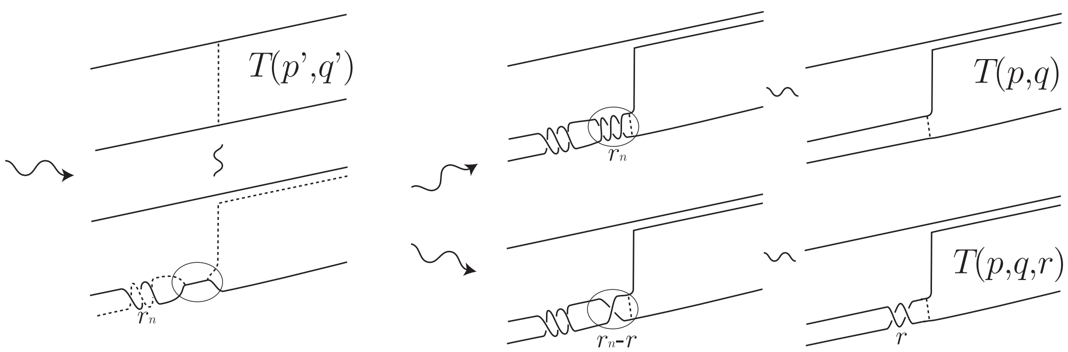


図 10: $T(p,q)$ と $T(p,q,r)$ の tunnel の cabling construction

定理 7.1 と定理 4.1 から次の系が得られる．

系 7.2. $p \not\equiv 1 \pmod q$，$q \not\equiv 1 \pmod p$，$r = \pm 2$ であるとき，図 9 の *tunnel* は $(1,1)$-*knot* の $(1,1)$ でない *tunnel* である．

合田氏-林氏 [GH] によって，$T(5,7,2)$ の例が挙げられている．

定理 1.1 の証明. $K := T(p,q,r)$ が 2-bridge または torus knot であると仮定する．ただし，p, q は互いに素な整数で $3 \leq p < q$，r は偶数とする．定理 7.1 で求めた parameter（以下単に parameter とよぶことにする）は，長さが 2 以上なので，K が 2-bridge knot であれば定理 5.1 の parameter に一致し，K が torus knot であれば定理 6.1 または 6.2 の parameter に一致するはずである．そこで次のように，p, q について場合分けして考える．

Case 1. $q \equiv 1 \pmod p$ $(q = mp+1)$) のとき，parameter は次のうちのどれかである．

$$\begin{cases} ([-\frac{1}{3}], -1) & (K = 5_2, (p,q,r) = (3,4,-4)), \\ ([-\frac{1}{3}], -3) & (K = 5_1, (p,q,r) = (3,4,-2)), \\ ([-\frac{1}{2m+1}], -(4m+3)) & (K = T(3, 3m+2), (p,q,r) = (3, 3m+1, 2)). \end{cases}$$

Case 2. $q \equiv -1 \pmod p$ $(p = (m+1)q - 1)$ のとき，parameter は次のうちのどれかである．

$$\begin{cases} ([-\frac{1}{3}], -1) & (K = 5_2, (p,q,r) = (3,5,-6)), \\ ([-\frac{1}{3}], -3) & (K = 5_1, (p,q,r) = (3,5,-4)), \\ ([-\frac{1}{2m+1}], -(4m+1)) & (K = T(3, 3m+1), (p,q,r) = (3, 3m+2, -2)). \end{cases}$$

Case 3. $q \not\equiv \pm 1 \pmod p$ のとき，parameter は 2-bridge knot のものとも torus knot のものとも一致しない．よって，このとき K は 2-bridge knot でも torus knot でもない．

□

参考文献

[BRZ] M. Boileau, M. Rost, H. Zieschang: *On Heegaard decompositions of torus knot exteriors and related Seifert fibre spaces*, Math. Ann. 279 (1988), no. 3, 553-581.

[CM1] S. Cho, D. McCullough: *The tree of knot tunnel*, Geom. Topol. 13 (2009), no. 2, 769-815.

[CM2] S. Cho, D. McCullough: *Cabling sequences of tunnels of torus knots*, Algebr. Geom. Topol. 9 (2009), no. 1, 1-20.

[GH] H. Goda, C. Hayashi: *Genus two Heegaard splittings of exteriors of 1-genus 1-bridge knots*, preprint.

[K1] T. Kobayashi: *A criterion for detecting inequivalent tunnels for a knot*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107 (1990), no. 3, 483-491.

[K2] T. Kobayashi: *Classification of unknotting tunnels for two bridge knots*, Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), Geom. Topol. Monogr. 2 (1999). 259-290.

[Mo] K. Morimoto: *Essential surfaces in the exteriors of torus knots with twists on 2-strands*, preprint.

[MS] K. Morimoto, M. Sakuma: *On unknotting tunnels for knots*, Math. Ann. 289 (1991), no. 1, 143-167.

[MSY] K. Morimoto, M. Sakuma, Y. Yokota: *Examples of tunnel number one knots which have the property* "$1+1=3$", Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 119 (1996), no. 1, 113-118.

[U] Y. Uchida: *Detecting inequivalence of some unknotting tunnels for two-bridge knots*, Algebra and topology 1990 (Taejon, 1990), Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Taejŏn (1990) 227-232,

Tangle analysis of Xer recombination on catenanes

(I.K.Darcy 氏、R.Mediconduri 氏 (共に University of Iowa)、石原海氏 (埼玉大学) との共同研究)

下川 航也
埼玉大学大学院理工学研究科

1. 初めに

この研究は、石原海氏 (埼玉大学)、I.K.Darcy 氏、R.Mediconduri 氏 (University of Iowa) との共同研究である。詳しい内容は、論文 [8] を参照して欲しい。

DNA に働く酵素 (enzyme) に関する研究には、結び目理論を含む多くの幾何学的手法が用いられている。DNA のトポロジーの全般的な内容は、参考文献の [4] を参照して頂きたい。結び目理論の酵素の働きの研究への応用は、[15, 2, 17] を参照して欲しい。また、[3, 9] は、最近の DNA トポロジーの国際会議のプロシーディングである。また、結び目理論関連の本では、[14, 1, 11] で DNA に働く酵素の話題が取り上げられている。

今回の研究では、大腸菌 (E. coli.) の DNA 組み換え酵素の Xer system の DNA 絡み目 (catenane という) への作用を、タングル解析を用いて考察する。

2. DNA 結び目と、DNA に働く酵素、タングル解析

DNA は 2 重螺旋の構造を持つ紐状の物体である。その為、環状 DNA は空間内で結び目や絡み目の構造を持つ。例えば、大腸菌の染色体および小さな DNA 分子のプラスミド (plasmid) は、環状であることが知られている。線状の場合には、局所的なトポロジーや幾何的構造が重要になる場合がある。DNA 絡み目は catenane と呼ばれる。

DNA に働く酵素は、DNA のトポロジーを変えるものがある。

例えば、トポイソメラーゼ (topoisomerase) は DNA に交差交換で作用し、絡み目を解くことが知られている。トポイソメラーゼに関する最近の研究は [17] 等を参照して欲しい。

今回考える DNA の組み換え酵素 (recombinase) は、もう少し複雑に作用する。組み換えが行われる部分では、組み換えに関わる DNA の部位 (recombination site) は大変短いため、そこだけ見ると非常に簡単な変化しか行われないが、組み換えには accessory protain と呼ばれる酵素が付随する場合があり、その協力により、より複雑なトポロジーの変化が与えられる場合がある。

それらの様子は、酵素が働く前と後のトポロジー (結び目、絡み目のタイプ) を調べることにより、その働きの様子を特徴付けることが出来る。Ernst-Sumners[10] は、タングル手術により部位特異的組み換えの様子を考察する方法を導入した。この方法はタングル解析と呼ばれている。タングル解析は、これまでにいくつかの部位特異的組み換え酵素の位相幾何学的な特徴付けに用いられている ([6, 7, 10, 16, 18, 19] など参照)。タングル解析の詳しい内容は、[15, 2, 17] を参照して欲しい。

組み換え酵素が触媒する作用は、次の図 1、2 に挙げるタングル手術でモデル化される。ここで、$N(T)$ はタングル T の分子を与える操作であり、$T + S$ はタングル T と S のタングル和である。

このモデルにおいて、以下を仮定する。酵素のメカニズムは一定であり、それは基質のトポロジーにはよらない。また、反応は 2 糸タングル E において起こり、E はタングル O_b と P のタングル和となっている。タングル O_b と O_f は組み換えの反応の際に不変である。組み換えはタングル P をタングル R に取り換えるタングル手術でモデル化される。P と R は有理タングルと仮定する。タングル $O = O_f + O_b$ は外部タングルとよばれ、組み換えの反応において変わらない部分である。

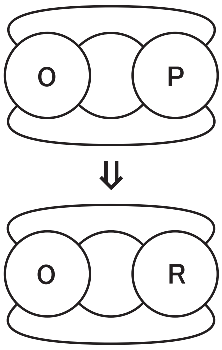


Figure 1. タングルモデル 1

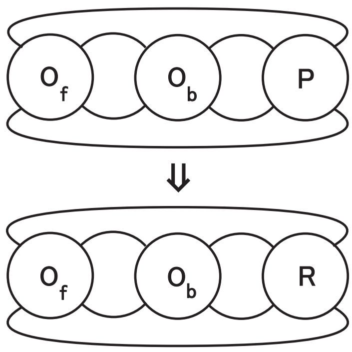


Figure 2. タングルモデル 2

基質の結び目、絡み目型を K_0 とし、生成物を K_1 とすると、次のタングル方程式が得られる。

$$(1)\qquad \begin{cases} N(O_f + O_b + P) = N(O + P) = K_0 \\ N(O_f + O_b + R) = N(O + R) = K_1 \end{cases}$$

3. Xer recombination on catenane

酵素のシステム Xer は大腸菌の中に存在し、プラスミドや染色体が複製される際に、二量体の解消などを行う。

Bath-Sherratt-Colloms[5] は、Xer が *psi* という部位をそれぞれの成分に持つプラスミドが作る 2 成分絡み目にも作用することを、実験により示した。彼らの実験では、$2k$-catenane ($(2, 2k)$-トーラス絡み目) に Xer が作用し、$(2k + 1)$ 交点の結び目を生成するらしいことが報告されている。特に、実験では $k = 3, 4, 5$ の場合の結果が報告されている。

この実験に対応するタングル方程式は、$k = 3, 4, 5$ に対し、

$$\begin{cases} N(O + P) = 2k\text{-cat} \\ N(O + R) = (2k + 1)\ \text{交点結び目} \end{cases}$$

となる。ここでは特に、$k = 3$ の場合、つまりトーラス絡み目 $T(2, 6)$ から 7 交点の素な結び目が得られる場合を考察する。

今回考える Xer-*psi* の組み換えでは、結び目と絡み目に上手く向きを与えると、タングル手術は *coherent* であると仮定してよいことが、組み換えの様子から分かる ([8] 参照)。ここでタングル手術が coherent とは、タングル手術のタングル以外の部分では、基質と生成物の向きが一致している場合を言う。

今回得られた結果は次の通りである。

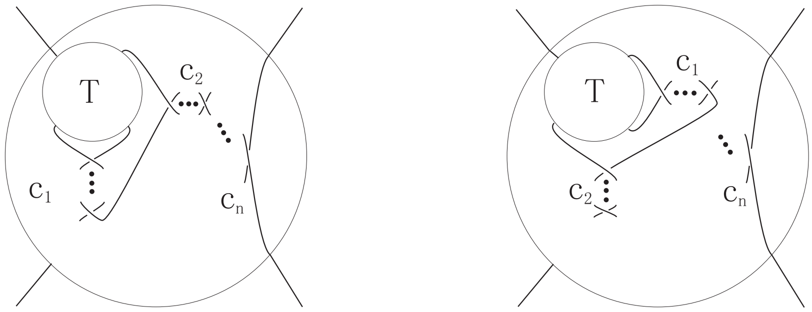
Theorem 1. [8, 13] $N(O + P)$ を 6-*cat* とし、$N(O + R)$ を 7_7 以外の 素な 7 交点結び目 K とする。$P = (0)$、$P = \left(\frac{a}{b}\right)$ $(a \geq 0)$ とする。このとき以下が成立する。

(1) $a = 1$、つまりバンド手術であり、
  (a) K は 7_2 で、 $O = \left(\frac{-6}{6b+11}\right)$
  (b) K は 7_4 で、$O = \left(\frac{-1}{3} + \frac{-1}{3}\right) \circ (-(b + 1), 0)$.

(2) $a > 1$、つまりバンド手術ではなく、K は 2 橋結び目 $N(\frac{c}{d})$ であり、$\frac{a}{b} = \left(\frac{c-6d}{d-h(c-6d)}\right)$、$O = \left(\frac{6}{6h+1}\right)$ $(h \in \mathbb{Z})$ を満たす。

$K = 7_7$ の場合は、バンド手術以外の有理タングル手術の特徴付けは終わっている。この場合には上記の解以外にも、$\frac{a}{b} = \left(\frac{-3}{3h-1}\right)$、 $O = (\frac{-1}{3} + \frac{-1}{3}) \circ (-(b+1), 0)$ $(h \in \mathbb{Z})$ という解が存在する。しかし、$K = 7_7$ の場合のバンド手術の分類は現在未解決である。

定理の中に現れた記号を説明する。整数の列 $c_1, \ldots, c_n$ に対し、タングル T と $(c_1, \ldots, c_n)$ の *circle product* を Figure 3 のように定義し、$T \circ (c_1, \ldots, c_n)$ と表す。



n : even n : odd

FIGURE 3. $T \circ (c_1, \ldots, c_n)$

$k = 4, 5$ の場合に、バンド手術に関してこれまで得られた結果は以下の通りである。ここでは簡単のため、$R = (-1)$ の場合を考える。これは、Xer の作用が通常 0-タングルから (-1)-タングルへの手術としてモデル化されることによる。一般のバンド手術でも議論は同じである。

Theorem 2. [8] $N(O+P)$ を 8-*cat* とし、$P = (0)$、$R = (-1)$ とする。このとき以下が成立する。

(1) $N(O+R) = 9_2$ とすると、$O = (\frac{-1}{1} + \frac{-1}{7})$ または $O = (\frac{-1}{7} + \frac{-1}{1})$ となる。
(2) $N(O+R) = 9_5$ とすると、$O = (\frac{-1}{3} + \frac{-1}{5})$ または $O = (\frac{-1}{5} + \frac{-1}{3})$ となる。

Theorem 3. [8] $N(O+P)$ を 10-*cat* とし、$P = (0)$、$R = (-1)$ とする。このとき以下が成立する。

(1) $N(O+R) = 11a247$ とすると、$O = (\frac{-1}{1} + \frac{-1}{9})$ または $O = (\frac{-1}{9} + \frac{-1}{1})$ となる。
(2) $N(O+R) = 11a343$ とすると、$O = (\frac{-1}{3} + \frac{-1}{7})$ または $O = (\frac{-1}{7} + \frac{-1}{3})$ となる。
(3) $N(O+R) = 11a363$ とすると、$O = (\frac{-1}{5} + \frac{-1}{5})$ となる。

詳しくは論文 [8] を参照して欲しい。これらの結果は、種数 1 の 2 橋結び目から、$(2, 2k)$-トーラス絡み目を与えるバンド手術の特徴付けを用いて証明される。これは [12] の議論の拡張である。

REFERENCES

[1] C.C. Adams, The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots. New York: W. H. Freeman, 1994.
[2] J. Arsuaga, Y. Diao and M. Vazquez, Mathematical Methods in DNA Topology: Applications to Chromosome Organization and Site-specific Recombination, to be included in the volume, Mathematics of DNA Structure, Function and Interactions (eds C.J. Benham, S. Harvey, W.K. Olson, D.W. Sumners and D. Swigon), Springer Science + Business Media, LLC, New York, (2009) in press.
[3] Mathematics of DNA Structure, Function and Interactions (eds C.J. Benham, S. Harvey, W.K. Olson, D.W. Sumners and D. Swigon), Springer Science + Business Media, LLC, New York, (2009) in press.
[4] A.D. Bates and A. Maxwell, DNA Topology (2nd ed.), Oxford university press, 2005.

[5] J. Bath, D. Sherratt, and S. Colloms, Topology of Xer recombination on catenanes produced by Lambda Integrase, J. Mol. Biol. **289** (1999) 873-883.
[6] D. Buck and C.V. Marcotte, Tangle solutions for a family of DNA-rearranging proteins, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **139** (2005) 59-80.
[7] I.K. Darcy, Biological distances on DNA knots and links: Applications to Xer recombination, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001), 269–294.
[8] I.K. Darcy, K. Ishihara, R. Mediconduri, and K. Shimokawa, Tangle analysis of Xer recombination on catenanes, preprint.
[9] 研究会報告「結び目とソフトマター物理学：高分子のトポロジー、そして物理学、数学および生物学における関連する話題」物性研究 92-1 (2009). 世話人：出口哲生, 今井正幸、高野宏、下川航也、津留崎恭一、Andrzej Stasiak.
[10] C. Ernst and D.W. Sumners, A calculus for rational tangles: Applications to DNA recombination, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **108** (1990), 489–515.
[11] E. Flapan, When Topology Meets Chemistry: A Topological Look at Molecular Chirality, Cambridge University Press, 2000.
[12] M. Hirasawa and K. Shimokawa, Dehn surgery on strongly invertible knots which yield lens spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3445-3451.
[13] K. Ishihara and K. Shimokawa, in preparation.
[14] 村杉邦男, 結び目理論とその応用, 日本評論社, 1993.
[15] 佐伯修, DNA 結び目のメカニズム, 「技術に生きる現代数学」若山正人編, 175-204. 岩波書店,(2008).
[16] K. Shimokawa, K. Ishihara, and M. Vazquez, Tangle analysis of DNA unlinking by the Xer/FtsK system. 物性研究 92-1(2009).
[17] K. Shimokawa and M. Vazquez, DNA と結び目理論, 数学 (2010).
[18] M. Vazquez and D.W. Sumners, Tangle analysis of Gin site-specific recombination, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **136** (2004) 565–582.
[19] M. Vazquez, S.D. Colloms and D.W. Sumners, Tangle analysis of Xer recombination reveals only three solutions, all consistent with a single three dimensional topology pathway, J. Mol. Biol. **346** (2005) 493-504.

Algebraic Structures Derived from Essential Surfaces and Foams

J. Scott Carter
University of South Alabama

Masahico Saito
University of South Florida

January 12, 2010

Abstract

Two-dimensional topological quantum field theories for surfaces are characterized by means of Frobenius algebras, where saddle points correspond to multiplication and comultiplication. We explore generalizations to essential surfaces in 3-manifolds and foams in 3-space. Module and comodule structures are used for essential surfaces, and Lie bracket and bialgebra structures are examined as operations along branch curves for foams. Relations to the original Frobenius algebra structures are discussed both algebraically and diagrammatically.

1 Introduction

This is a brief summary of [8, 9], to which we refer the reader for details. We propose two generalizations of 2-dimensional topological quantum field theories (2D-TQFTs); one for surface cobordisms in thickened surfaces that have both inessential and essential circles [8], and the other for foams that have branch circles along which three sheets merge [9]. Our motivations come from the differentials of generalizations of Khovanov homology [12] defined in [3, 19] for thickened surfaces, those for virtual knots [10, 18], and those for $sl(3)$ knot polynomials [13, 17]. Since the differentials of Khovanov homology theories come from 2D-TQFTs and Frobenius algebras [14], studies of generalized 2D-TQFTs are expected to lead to a unified algebraic view and new constructions.

The paper is organized as follows. In Section 2, we provide a brief review of necessary materials and establish notation. In Section 3, we propose an algebraic structure called "commutative Frobenius pairs" and present examples and constructions. In Section 4, we study algebraic structures that appear under 2D-TQFTs along branch circles.

2 Preliminaries

A *Frobenius algebra* is an (associative) algebra (with multiplication $\mu : A \otimes A \to A$ and unit $\eta : k \to A$) over a unital commutative ring k with a nondegenerate associative pairing $\beta : A \otimes A \to k$. The pairing β is also expressed by $\langle x|y\rangle = \beta(x \otimes y)$ for $x, y \in A$, and it is *associative* in the sense that $\langle xy|z\rangle = \langle x|yz\rangle$ for any $x, y, z \in A$.

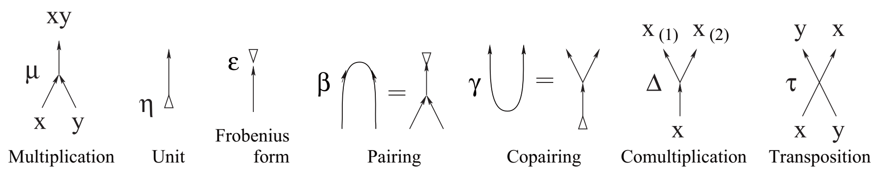


Figure 1: Diagrams for Frobenius algebra maps

A Frobenius algebra A has a linear functional $\epsilon : A \to k$, called the *Frobenius form*, or a *counit*, such that the kernel contains no nontrivial left ideal. It is defined from β by $\epsilon(x) = \beta(x \otimes 1)$, and conversely, a Frobenius form gives rise to a nondegenerate associative pairing β by $\beta(x \otimes y) = \epsilon(xy)$, for $x, y \in A$. A Frobenius form has a unique copairing $\gamma : k \to A \otimes A$ characterized by

$$(\beta \otimes |)(| \otimes \gamma) = | = (| \otimes \beta)(\gamma \otimes |),$$

which we call the *cancelation* of β and γ. Here and below, we denote by $|$ the identity homomorphism on the algebra. This notation will distinguish this function from the identity element $1 = 1_A = \eta(1_k)$ of the algebra that is the image of the identity of the ground field. A Frobenius algebra A determines a coalgebra structure with A-linear (coassociative) comultiplication and the counit defined using the Frobenius form. The comultiplication $\Delta : A \to A \otimes A$ is defined by

$$\Delta = (\mu \otimes |)(| \otimes \gamma) = (| \otimes \mu)(\gamma \otimes |).$$

The multiplication and comultiplication satisfy the following equality:

$$\Delta\mu = (\mu \otimes |)(| \otimes \Delta) = (| \otimes \mu)(\Delta \otimes |)$$

which we call the *Frobenius compatibility condition.* In Fig. 1, diagrammatic conventions of various maps that appear for Frobenius algebras are depicted.

The diagrams are read from bottom to top, and each line segment represents a tensor factor of A.

A Frobenius algebra is *commutative* if it is commutative as an algebra. It is known ([15] Prop. 2.3.29) that a Frobenius algebra is commutative if and only if it is cocommutative as a coalgebra. The map $\mu\Delta$ of a Frobenius algebra is called the *handle operator,* and corresponds to multiplication by a central element called the *handle element* $\delta_h = \mu\Delta(1)$ ([15], page 128). Commutative Frobenius algebras are in one-to-one correspondence with 2D-TQFTs, see again [15].

3 Frobenius pairs and essential surface cobordisms

In this section, we outline the definitions of the algebraic structures that represent essential surface cobordisms. The ring A and the A-module E are represented by solid and dotted lines, respectively, and variety of multiplication and comultiplication are depicted by trivalent vertices, read from bottom to top. We note that the possibilities of trivalent vertices are summarized by saying that the dotted line does not end at a trivalent vertex, while a solid line can. The definition below is motivated from surface cobordisms, and the correspondence is exemplified in Fig. 2. Briefly, the elements of E are associated to essential curves in the surface cobordism and the elements of A are associated to compressible curves.

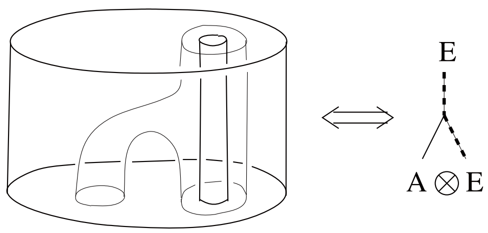


Figure 2: A cobordism with essential curves and module action

In [8], a *commutative Frobenius pair* (A, E) is defined as follows.

(i) $A = (\mu_A, \Delta_A, \eta_A, \epsilon_A)$ is a commutative Frobenius algebra over k with multiplication μ_A, comultiplication Δ_A, unit η_A and counit ϵ_A.

(ii) E is an A-bimodule and A-bicomodule, with the same right and left actions and coactions.

(iii) The action and coaction satisfy the canceling conditions with the pairing and copairing as follows: $(\beta \otimes |)(| \otimes \Delta_E^{A,E}) = \mu_{A,E}$, $(| \otimes \mu_{A,E}^E)(\gamma \otimes |) = \Delta_E^{A,E}$.
(iv) E has an associative, commutative multiplication $\mu_E : E \otimes E \to E$ and a coassociative commutative comultiplication $\Delta_E : E \to E \otimes E$, that are A-bimodule and A-bicomodule maps, such that the maps μ_E and Δ_E satisfy the compatibility condition:

$$(| \otimes \mu_E)(\Delta_E \otimes |) = \Delta_E \mu_E = (\mu_E \otimes |)(| \otimes \Delta_E).$$

They satisfy conditions depicted in Figs. 3, 4, 5. See [8] for details.

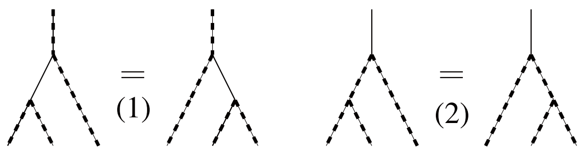


Figure 3: Analogs of associativity

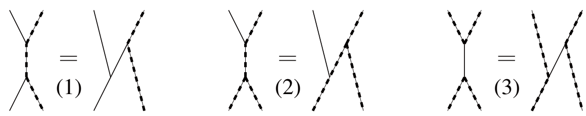


Figure 4: Compatibility conditions

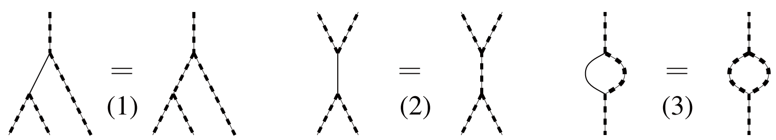


Figure 5: Consistency conditions

There are also three k-linear maps $\nu_A^E : A \to E$, $\nu_E^A : E \to A$ and $\nu_E^E : E \to A$, called *Möbius maps* , corresponding to non-orientable cobordism (a punctured Möbius band).

It was shown in [8] that cobordisms in thickened surfaces induce, under a TQFT, the structure of commutative Frobenius pairs. Furthermore, the following constructions were given in [8].

Theorem 3.1 *Let $A = \mathbb{Z}[X, h, t]/(X^2 - hX - t)$ and $E = \langle Y, Z\rangle$. If (A, E) is a commutative Frobenius pair with $\mu^E_{E,E} = \Delta^{E,E}_E = 0$, then A must be of the form $A = \mathbb{Z}[X, a]/(X - a)^2$.*

Let $A = \mathbb{Z}[X, a]/(X - a)^2$, $E = \langle Y, Z\rangle$ and assume $\mu^E_{E,E} = \Delta^{E,E}_E = 0$. Then there exist commutative Frobenius pair structures with Möbius maps on (A, E).

Theorem 3.2 *Let A be a commutative Frobenius algebra over a commutative unital ring k with handle element ϕ, such that there exists an element $\xi \in A$ with $\xi^2 = \phi$. Then there exists a commutative Frobenius pair (A, E) with Möbius maps.*

Theorem 3.3 *If A is a commutative Frobenius algebra of finite rank over a commutative unital ring k, such that its handle element $\phi \in A$ is invertible, then there exists a commutative Frobenius pair (A, E) with Möbius maps.*

4 Algebraic structures derived from foams

For categorifications of the $sl(3)$ knot invariants, 2-dimensional complexes called foams have been used [13, 17]. In this section we give an overview of [9] on algebraic structures induced under TQFTs for branched circles.

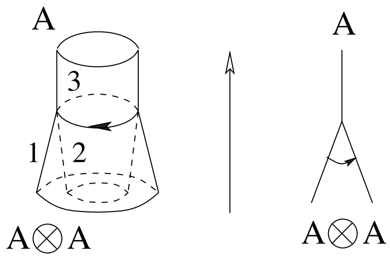


Figure 6: Operation on a branch circle

As depicted in Fig. 6, we consider the operation $\mathbf{m} : A \otimes A \to A$ induced by a TQFT along a branch circle where two circles merge to one, and $\mathbf{\Delta} : A \to A \otimes A$ that is represented by the upside-down figure. Thus A is a commutative Frobenius algebra under the TQFT, and we investigate additional structures corresponding to the branch circles.

For a commutative Frobenius algebra A over a unital ring R of finite rank and with a non-degenerate Frobenius form ϵ, there is a basis $\{x_i\}$ and a dual basis $\{y_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, such that $\epsilon(x_i y_i) = \delta_{i,j}$, the Kronecker delta, and $x = \sum_i y_i \epsilon(x_i x)$. This situation is depicted in Fig. 7, where the identity

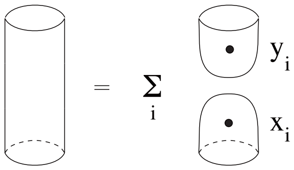


Figure 7: The $\Delta(1)$-relation

map $x \mapsto x$ in the LHS corresponds to the annular cobordism in the left of the figure, and the sum involving the Frobenius form ϵ is depicted in the right of the figure. We call this the $\Delta(1)$-relation, as it is also computed from the value of $\Delta(1)$. Then the operations $\mathbf{m}, \boldsymbol{\Delta}$ are computed by this relation, together with the values of the closed theta foam depicted in Fig. 8.

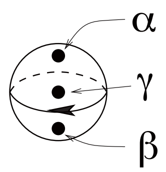


Figure 8: The theta foam

We found the following operations.

Proposition 4.1 *For any commutative unital ring R and a positive odd integer $N > 1$, there exist a Frobenius algebra A over R and values of the theta foams such that the branch circle operation* $\mathbf{m}$ *induces a non-trivial Lie algebra structure on A.*

Proposition 4.2 *Let G be an abelian group. For any unital ring R, the branch circle operation* $\mathbf{m}$ *induces a bialgebra structure on the group ring $A = R[G]$ if and only if every non-identity element of G has order* 2.

Furthermore, for the Frobenius algebra $A = \mathbb{Z}[a,b,c][X]/(X^3 - aX^2 - bX - c)$ used in [17], the following identities were obtained.

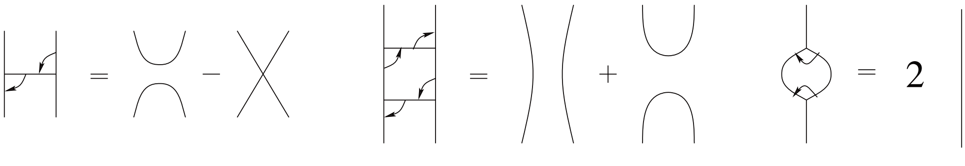


Figure 9: Web skein relations

Proposition 4.3 *For $A = \mathbb{Z}[a,b,c]/(X^3 - aX^2 - bX - c)$ with θ values as above, the map $\mathbf{\Delta} : A \to A \otimes A$ satisfies the following identities:*

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{m} \otimes |)(| \otimes \mathbf{\Delta}) & = & \Delta(1)(\epsilon\mu) - \tau, \\ (\ (\mathbf{m} \otimes |)(| \otimes \mathbf{\Delta})\ )^2 & = & | + \Delta(1)(\epsilon\mu), \\ \mathbf{m\Delta} & = & 2\ |. \end{array}$$

The skein relations stated in Proposition 4.3, as planar diagrams (instead of surface skein relation), coincide with those described in [13] as a description of Kuperberg's invariant [16], with the choice of $q = 1$.

Thus, the operation at branch curve of the foam used to categorify the quantum $sl(3)$ invariant satisfies the skein relations at the classical limit of the invariant.

Acknowledgments

JSC was supported in part by NSF Grant DMS #0603926. MS was supported in part by NSF Grants DMS #0603876 and #0900671.

References

[1] L. Abrams, *Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras*, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996) 596-587.

[2] M. Asaeda; C. Frohman, *A note on the Bar-Natan skein module*, Internat. J. Math. **18** no. 10 (2007) 1225-1243.

[3] M.M. Asaeda; J.H. Przytycki; A.S. Sikora, *Categorification of the Kauffman bracket skein module of I-bundles over surfaces*, Algebr. Geom. Topol. **4** (2004) 1177-1210.

[4] D. Bar-Natan, *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*, Geom. Topol. **9** (2005) 1443–1499.

[5] C. Caprau, *Twin TQFTs and Frobenius algebras*, arXiv:0901.2979.

[6] J.S. Carter; A.S. Crans; M. Elhamdadi; E. Karadayi; M. Saito, *Cohomology of Frobenius Algebras and the Yang-Baxter Equation*, Communications in Contemporary Mathematics **10** Suppl. 1 (2008) 791–814.

[7] J.S. Carter; M. Saito, *Knotted surfaces and their diagrams*, Surveys and monographs, vol. 55, A.M.S., 1998.

[8] J.S. Carter; M. Saito, *Frobenius modules and essential surface cobordisms*, Preprint, arXiv:math.GT/09054475.

[9] J.S. Carter; M. Saito, *Algebraic structures derived from foams*, Preprint, arXiv:math.GT/10010775.

[10] A. Ishii; K. Tanaka, *A categorification of the one-variable Kamada-Miyazawa polynomial*, to appear.

[11] U. Kaiser, *Frobenius algebras and skein modules of surfaces in* 3-*manifolds*, arXiv:0802.4068v1.

[12] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101(3)** (1999) 359–426.

[13] M. Khovanov, $sl(3)$ *link homology*, Algebraic & Geometric Topology **4** (2004) 1045–1081.

[14] M. Khovanov, *Link homology and Frobenius extensions*, Fundamenta Mathematicae **190** (2006) 179-190.

[15] J. Kock, *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories*, London Mathematical Society Student Texts (No. 59), Cambridge University Press (2003).

[16] G. Kuperberg, *Spiders for rank* 2 *Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **180(1)** (1996) 109–151.

[17] M. Mackaay; P. Vaz, *The universal* sl_3*-link homology*, arXiv:math/0603307.

[18] V. O. Manturov, *Khovanov homology for virtual knots with arbitrary coefficients*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007) 345–377.

[19] V. Turaev; P. Turner, *Unoriented topological quantum field theory and link homology*, arXiv:math/0506229.

[20] O.Ya. Viro, *Khovanov homology, its definitions and ramifications*, Fund. Math. **184** (2004) 317–342.

仮想結び目の交点数とステイト数

冨山祐美
神戸大学大学院理学研究科 博士課程前期課程 2 年

概要

virtual knot に対して, real crossing number と virtual crossing number が定義される. 本稿では, これらの crossing number の実現問題に関して得られた結果を述べ, 証明を与える. さらに, 1-state number を定義し, 得られた結果を紹介する. また, Jones polynomial および Miyazawa polynomial の性質を述べる.

1 Definition

virtual link diagram とは, $\mathbb{R}^2$ にはめ込まれたいくつかの円周 $S^1 \cup \cdots \cup S^1$ で, 図 1 に示す 2 種類の交点を持つものをいう. 図 1 の左の交点は *real crossing*, 右の交点は *virtual crossing* と呼ばれる. 特に virtual crossing をひとつも持たない virtual link diagram を *classical diagram* という.

図 1 real crossing (左) と virtual crossing (右)

図 2 に示す 7 種の変形は *generalized Reidemeister move* と呼ばれる. 2 つの virtual link diagram が *equivalent* であるとは, 一方に有限回の generalized Reidemeister move を行うことによってもう一方が得られるときをいう. *virtual link* とは, virtual link diagram 全体の集合を上記の同値関係で割ったときの同値類をいう. 特に classical diagram で表される virtual link を *classical link* と呼び, 成分数が 1 の virtual link を *virtual knot* と呼ぶ. 本稿では主に virtual knot について考察する.

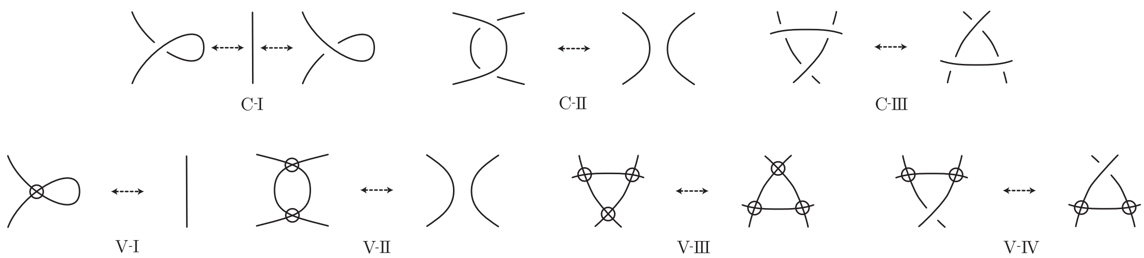


図 2 generalized Reidemeister moves

K を virtual knot とし, D を K の任意の virtual knot diagram とする. D における real crossing, virtual crossing の個数をそれぞれ $r(D)$, $v(D)$ とかく. $r(D)$, $v(D)$ の最小値をそれぞれ K の *real crossing number*, *virtual crossing number* と呼び, $\mathrm{r}(K)$, $\mathrm{v}(K)$ で表す.

D を virtual knot diagram とする．D の全ての real crossing で A-splice または B-splice のいずれかを行って得られる diagram を D の *state* と呼び, その集合を $\mathcal{S}(D)$ とかく．

2 Jones polynomial and Miyazawa polynomial

virtual knot K とその diagram D に対し, $f_K(A) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ を

$$f_K(A) = (-A^3)^{-w(D)} \sum_{S \in \mathcal{S}(D)} A^{a(S)-b(S)}(-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$$

と定める．ここで, $a(S)$, $b(S)$ はそれぞれ D から S を得るために行った A-splice, B-splice の回数とし, $w(D)$ は D の writhe, $|S|$ は S における loop の個数を表す．このとき, $V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$ として得られる $V_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ を K の *Jones polynomial* と呼ぶ.

Jones polynomial を変えない local move として, 次が知られている．

Lemma 2.1. 図 3 に示す local move で, Jones polynomial は変化しない.

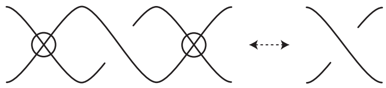


図 3　Jones polynomial を変えない local move

virtual knot K の Jones polynomial $V_K(t)$ における変数 t の最高次数から最低次数を引いたものを $V_K(t)$ の *span* と呼び, $\mathrm{span}V_K(t)$ とかく．classical knot の crossing number が Jones polynomial の span を用いて評価できることはよく知られているが, このことは virtual knot の real crossing number に対しても同様に成り立つ.

Theorem 2.1. 任意の virtual knot K に対して, $\mathrm{r}(K) \geq \mathrm{span}V_K(t)$ が成り立つ.

Theorem 2.1 から次の corollary を得る．

Corollary 2.1. D を classical knot diagram とする．D が reduced alternating diagram であるとき, 次の 2 つが成り立つ.
(i) D が表す virtual knot を K とするとき, $r(D) = \mathrm{r}(K)$ が成り立つ.
(ii) D の 1 つの real crossing を virtual crossing に置き換えて得られる virtual link diagram を D_v とし, D_v が表す virtual knot を K_v とするとき, $r(D_v) = \mathrm{r}(K_v)$ が成り立つ.

(i) は alternating classical knot における通常の crossing number は, virtual knot のクラスにおける real crossing number と一致することを意味する．さらに, Corollary 2.1 の記号のもとで, K_v の real crossing number は次のように決定される.

Theorem 2.2. Corollary 2.1 の記号のもとで,

$$\mathrm{r}(K) = \mathrm{span}V_K(t),$$

$$\mathrm{r}(K_v) = \mathrm{span}V_{K_v}(t) + \frac{1}{2}$$

が成り立つ.

[6] において, Jones polynomial における Kauffman の state sum を一般化することにより, virtual knot の新たな polynomial invariant が構成された. これは *Miyazawa polynomial* と呼ばれている. 後に数回の改良がなされているが, 今回は [9] で定義されたものを用いる.

K を virtual knot とし, D を K の diagram とする. D の real crossing を splice する際, 図 4 のように coherent splice と non-coherent splice の 2 種類が考えられる. non-coherent splice に対しては図 4 の右に示すように pole と呼ばれる短い 2 本の棒を立てておく [3].

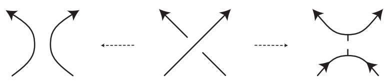


図 4 coherent splice (左) と non-coherent splice (右)

こうして得られた state $S \in \mathcal{S}(D)$ の各 loop において, 必要なら図 5 左に示すように pole を移動させる. さらに図 5 中央に示すように隣接した 2 本の pole が同じ向きを向いているときはこの 2 本を消去して pole の整理を行う. 上記の操作により, S の各 loop 上には図 5 右に示すように偶数本の pole が向きが交互になるように現れる. S の loop C 上に $2i$ 本の pole が存在するとき, C の *index* は i であるといい, $\sigma(C) = i$ とかく. S における index が i である loop の個数を $c_i(S)$ とかく.

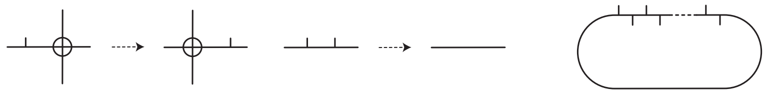


図 5 pole の移動 (左) と消去 (中央) および整理された loop(右)

このとき, Miyazawa polynomial の bracket polynomial $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}, x_1, x_2, \dots]$ は

$$\langle D \rangle = \sum_{S \in \mathcal{S}(D)} A^{a(S)-b(S)}(-A^2 - A^{-2})^{c_0(S)} x_1^{c_1(S)} x_2^{c_2(S)} \dots$$

と定義される. さらに, この bracket polynomial を用いて Miyazawa polynomial $R_K \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}, x_1, x_2, \dots]$ は $R_K = (-A^3)^{-w(D)}\langle D \rangle$ として定義される.

Miyazawa polynomial を変数 x_i について整理する. 非負整数 e_i $(i \geq 1)$ の無限列 $I = (e_1, e_2, \dots)$ で, 有限項を除いて 0 であるものの集合を $\mathcal{I}$ とかく. 全ての i (≥ 1) に対して $e_i = 0$ のときは $I = (0)$, ある自然数 n に対して $e_n \neq 0$ かつ $e_i = 0$ $(i > n)$ のときは $I = (e_1, \dots, e_n)$ と略記する. $I = (e_1, e_2, \dots)$ に対して, $x_I = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots$ と定めると, Miyazawa polynomial は次のような展開を持つ.

$$\begin{aligned} R_K &= \sum_{I \in \mathcal{I}} F_I(A) x_I \\ &= F_0(A) + F_1(A)x_1 + F_{01}(A)x_2 + F_2(A)x_1^2 + F_{001}(A)x_3 + F_{11}(A)x_1x_2 + F_3(A)x_1^3 + \dots \end{aligned}$$

ここで, $F_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(A) = F_{e_1 e_2 \dots e_n}(A)$ と略記した.

Example 2.1. 図 6 に示す virtual knot diagram が表す virtual knot を K とすると, K の Miyazawa polynomial R_K は次のようになる.

$$R_K = (-A^{-2} - 2A^{-6} - A^{-10}) + (-2A^{-2} + A^{-6} - A^{-10})x_1 + A^{-8}x_2 + A^{-10}x_1^2 + A^{-8}x_1x_2 + A^{-6}x_1^3.$$

したがって, 各係数多項式 $F_I(A)$ は以下のようになる.

$$F_0(A) = -A^{-2} - 2A^{-6} - A^{-10},\ F_1(A) = -2A^{-2} + A^{-6} - A^{-10},$$
$$F_{01}(A) = A^{-8},\ F_2(A) = A^{-10},\ F_{11}(A) = A^{-8},\ F_3(A) = A^{-6}.$$

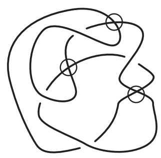


図 6

Miyazawa polynomial の係数多項式 $F_I(A)$ における A の指数に関して, 次の結果が得られた.

Theorem 2.3. L を virtual link とする. 数列 $I = (e_1, e_2, \dots) \in \mathcal{I}$ に対して $F_I(A) \neq 0$ であるとき, 次が成り立つ. ここで, $\mu(L)$ は L の成分数を表す.
(i) $F_I(A) \in \mathbb{Z}[A^4, A^{-4}] \cdot A^{2\mu(L)}$ が成り立つための必要十分条件は, $\sum_{k\geq 1} e_{2k} \equiv 0 \pmod 2$ が成り立つことである.
(ii) $F_I(A) \in \mathbb{Z}[A^4, A^{-4}] \cdot A^{2\mu(L)+2}$ が成り立つための必要十分条件は, $\sum_{k\geq 1} e_{2k} \equiv 1 \pmod 2$ が成り立つことである.

virtual knot K の Miyazawa polynomial R_K において, $F_I(A) \neq 0$ をみたす全ての $I = (e_1, e_2, \dots) \in \mathcal{I}$ にわたる $\sum_{k\geq 1} ke_k$ の最大値を R_K の *weighted degree* と呼び, $\mathrm{wdeg}R_K$ とかく. これを用いて, virtual crossing number の評価式が与えられることが知られている.

Theorem 2.4 ([1, 10])**.** 任意の virtual knot K に対して, $\mathrm{v}(K) \geq \mathrm{wdeg}R_K$ が成り立つ.

3 real and virtual crossing numbers

real crossing number と virtual crossing number の実現問題に関して次の問題は未解決である.

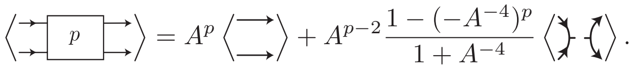
Open problem. 任意の virtual knot K に対して, $\mathrm{v}(K) < \mathrm{r}(K)$ は常に成り立つか?

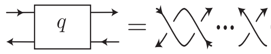
この問題に関して今回は次の結果を得た.

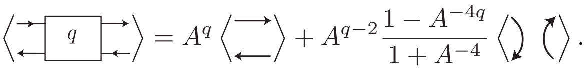
Theorem 3.1. $m < n$ をみたす任意の自然数 m, n に対して, $\mathrm{v}(K) = m$ かつ $\mathrm{r}(K) = n$ をみたす virtual knot K が常に存在する.

Theorem 3.1 を証明するために, 次の lemma を準備する.

Lemma 3.1. (i) 自然数 p に対して, 次式が成り立つ. ただし, = (p 個) とする.



(ii) 正の偶数 q に対して, 次式が成り立つ. ただし,  (q 個) とする.



Theorem 3.1 の証明は m と n の偶奇で場合分けを行い, 図 7, 9 に示す virtual knot diagram を用いる.

Proof of Theorem 3.1.
(i) $m \not\equiv n$ (mod 2) の場合
図 7 に示す virtual knot diagram D_1 で表される virtual knot を K_1 とする. $v(D_1) = m$, $r(D_1) = n$ であることより, $\mathrm{v}(D_1) \leq m$, $\mathrm{r}(D_1) \leq n$ が成り立つ.

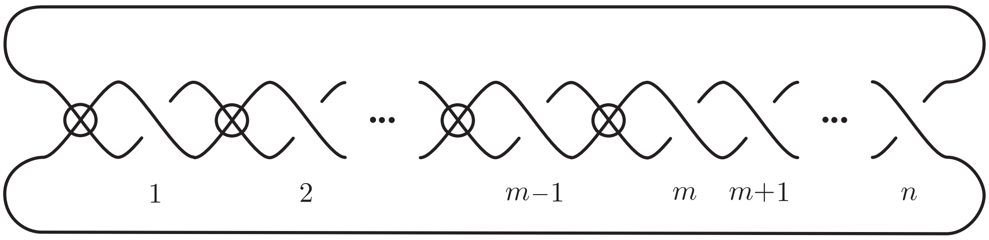
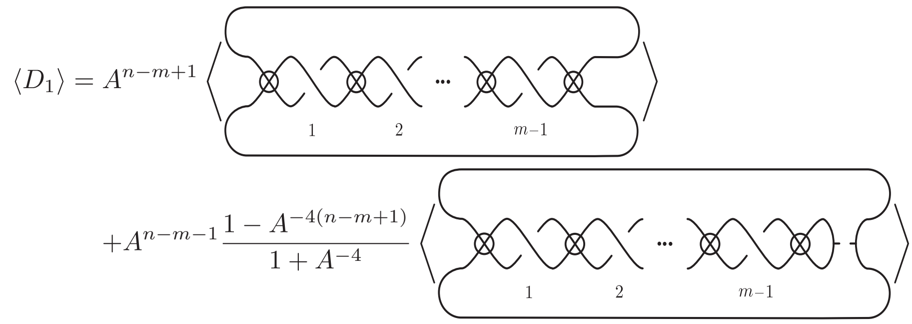


図 7　D_1

次に $\mathrm{v}(K_1) \geq m$ であることを示す. Theorem 2.4 より $\mathrm{wdeg}R_{K_1} \geq m$ を示せば十分である. Lemma 3.1(i) より,



が成り立つ. 右辺左側の diagram においては両端の 2 つの virtual crossing を消去できるので, virtual crossing の個数は $m-2$ 以下にできる. Theorem 2.4 より左の diagram から得られる weighted degree は $m-2$ 以下なので, weighted degree が m である項を含む可能性があるのは右側の diagram である. 実際に, weighted degree が m となる項は右辺右側の diagram において全ての real crossing を non-coherent splice してできる state のみから得られ, その項は x_m を含む. R_{K_1} における x_m の係数多項式は

$$(-1)^{-w(D)}A^{-3w(D)+n-2m}\frac{1-A^{-4(n-m+1)}}{1+A^{-4}} \neq 0$$

であることより, $\mathrm{wdeg}R_{K_1} \geq m$ が成り立つ.

次に, $\mathrm{r}(K_1) \geq n$ であることを示す.

m が偶数のとき　D_1 に対して図 3 に示す local move を $\frac{m}{2}$ 回行って得られる diagram を D_1' とし, D_1' が表す virtual knot を K_1' とすると, Theorem 2.1 より $V_{K_1}(t) = V_{K_1'}(t)$ が成り立つ. D_1' は reduced alternating diagram であるから, Corollary 2.1(i) および Theorem 2.2 より $\mathrm{span}V_{K_1'}(t) = n$ である. ゆえに, $\mathrm{span}V_{K_1}(t) = n$ であるから, Theorem 2.1 より $\mathrm{r}(K_1) \geq n$ がわかる.

m が奇数のとき　D_1 に対して図 3 に示す local move を $\frac{m-1}{2}$ 回行って得られる diagram を D_1'' とし, D_1'' が表す virtual knot を K_1'' とすると, Theorem 2.1 より $V_{K_1}(t) = V_{K_1''}(t)$ が成り立つ. D_1'' は reduced alternating diagram において 1 つの real crossing を virtual crossing に置き換えて得られるから, Corollary 2.1(ii) および Theorem 2.2 より $\mathrm{span}V_{K_1''}(t) = n - \frac{1}{2}$ である. ゆえに, $\mathrm{span}V_{K_1}(t) = n - \frac{1}{2}$ であるから, Theorem 2.1 より $\mathrm{r}(K_1) \geq n$ がわかる. 以上より, $\mathrm{v}(K_1) = m$, $\mathrm{r}(K_1) = n$ が成り立つ.

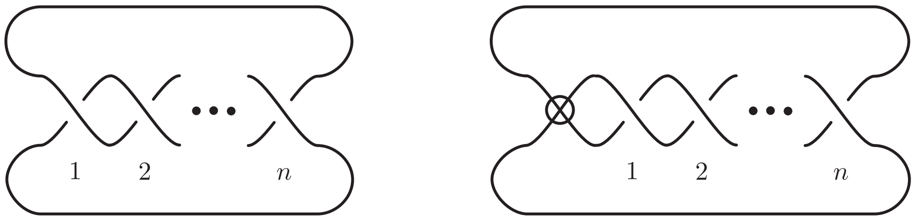


図 8　D_1'(左) と D_1''(右)

(ii) $m \equiv n$ (mod 2) の場合

図 9 に示す virtual knot diagram D_2 で表される virtual knot を K_2 とする. $\mathrm{v}(K_2) = m$, $\mathrm{r}(K_2) = n$ が成り立つことは, (i) と同様の議論で示される.

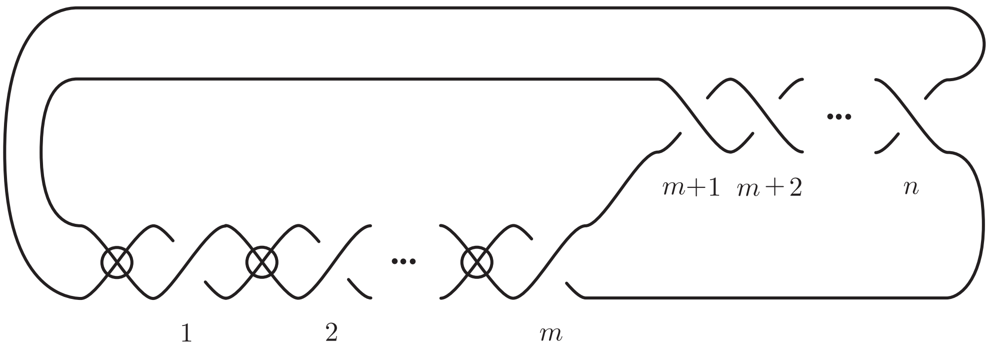


図 9　D_2

以上より, Theorem 3.1 が示された. □

4　state number

D を virtual knot diagram とする. state の集合 $\mathcal{S}(D)$ において, 1 つの loop で構成される state の個数を $s_1(D)$ とかく.

Example 4.1. 図 10 に示す diagram D は, 8 つの state を持ち, 1 つの loop で構成される state は 5 つある. したがって, $s_1(D) = 5$ である.

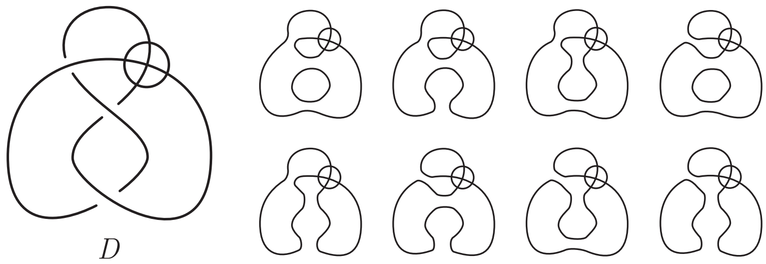


図 10　D とその 8 つの state

K を classical knot とするとき, K の全ての classical diagram にわたる $s_1(D)$ の最小値を K の *classical 1-state number* と呼び, $\mathrm{s}_1^c(K)$ とかく. classical 1-state number に関して次の結果が知られている. ここで, $\det(K)$ は K の determinant を表す.

Fact. K が classical alternating knot なら, $\mathrm{s}_1^c(K) = |\det(K)|$ が成り立つ.

classical 1-state number に関して, 次の結果が得られた.

Theorem 4.1. K を classical knot とするとき, 次の 3 つが成り立つ.
(i) $\mathrm{s}_1^c(K) \geq |\det(K)| = |V_K(-1)|$.
(ii) $\mathrm{s}_1^c(K) \equiv 1 \pmod 2$.
(iii) $\mathrm{s}_1^c(K) = |\det(K)|$ が成り立つための必要十分条件は, K が classical alternating knot であることである.

classical 1-state number の virtual knot への拡張を考える. K を virtual knot とするとき, K の全ての virtual diagram にわたる $s_1(D)$ の最小値を K の *1-state number* と呼び, $\mathrm{s}_1(K)$ とかく. 1-state number に関して次の結果を得た.

Theorem 4.2. K を virtual knot とするとき, 次の 3 つが成り立つ.
(i) $\mathrm{s}_1(K) \geq \|V_K(-1)\| \geq |V_K(-1)|$.
(ii) $\mathrm{s}_1(K) \equiv 1 \pmod 2$.
(iii) K が classical alternating knot なら, $\mathrm{s}_1(K) = \mathrm{s}_1^c(K)$ が成り立つ.

ここで, K が virtual knot のときは一般に $V_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ なので, $V_K(-1) \in \mathbb{C}$ であることに注意する. $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $\|a + bi\| = |a| + |b|$ と定める.

Theorem 4.2(i) における評価式は, Miyazawa polynomial を用いて次のように改良できる. ここで, 定義より $F_0(A)$ は $-A^2 - A^{-2}$ で割り切れることに注意して, $\widetilde{F}_0(A) = F_0(A)/(-A^2 - A^{-2})$ とおく.

Theorem 4.3. 任意の virtual knot K とその Miyazawa polynomial R_K に対して,

$$\mathrm{s}_1(K) \geq |\widetilde{F}_0(e^{\frac{\pi}{4}i})| + \sum_{I \neq (0)} |F_I(e^{\frac{\pi}{4}i})| \geq \|V_K(-1)\|$$

が成り立つ.

謝辞

講演の機会を与えてくださったことに感謝し, 本研究集会の世話人である早稲田大学の谷山公規教授, 花木良氏に心より御礼申し上げます. また, 参加者の皆様にはご清聴を賜り, 多くの貴重なアドバイスを頂いたことに感謝致します. 神戸大学の佐藤進先生, 中西康剛先生, 大阪電気通信大学の中村拓司先生にはセミナーを通してたくさんのことをご指導していただきました. ここに感謝申し上げます.

参考文献

[1] H. A. Dye and L. H. Kauffmnan, *Virtual crossing number and the arrow polynomial*, arXiv:0810.3858v3.

[2] J. Green, A Table of Virtual Knots, http://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/

[3] A. Ishii, *The pole diagram and the Miyazawa polynomial*, International J. of Math. **19** (2008), 193–207.

[4] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 103–111.

[5] N. Kamada, *An index of enhanced state of a virtual link diagram and Miyazawa polynomials*, Hiroshima Math. J. **37** (2007), 409–429.

[6] N. Kamada and Y. Miyazawa, *A 2-variable polynomial invariant for a virtual link derived from magnetic graphs*, Hiroshima Math. J. **35** (2005), 309–326.

[7] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory*, Europ. J. Combin. **20** (1999), 663–690.

[8] Y. Miyazawa, *Magnetic graphs and an invariant for virtual links*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), 1319–1334.

[9] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links*, J. Knot Theory Ramifications **17** (2008), 1311–1326.

[10] Y. Miyazawa, *A virtual link polynomial and the virtual crossing number*, J. Knot Theory Ramifications **18** (2009), 605–623.

GOUSSAROV-POLYAK-VIRO FINITE TYPE INVARIANTS FOR NANOWORDS AND NANOPHRASES

ANDREW GIBSON AND NOBORU ITO

Abstract. Goussarov, Polyak and Viro defined finite type invariants for virtual knots and links using the virtualization operation, which changes a real crossing into a virtual crossing. In this paper we generalize their definition to nanowords and nanophrases. We give several examples of finite type invariants for nanowords and nanophrases.

1. Nanophrases

In this section we recall definitions from [10] and [9]. Let α be a finite set. An α-alphabet is a finite set with a map to α. Elements of an α-alphabet are called letters. The image of a letter A under the map to α is written $|A|$. A word is a finite sequence of letters. The word with no letters is called the trivial word and is written $\emptyset$. A Gauss word is a word such that every letter in the word appears exactly twice. The trivial word $\emptyset$ is a Gauss word. The trivial n-component nanophrase is the n-component nanophrase where every component is $\emptyset$. It is written $\emptyset_n$.

An n-component nanophrase over α is a pair $(\mathcal{A}, w_1|w_2|\dots|w_n)$. Here, each w_i is a word such that the concatenation of all the words w_i is a Gauss word. Then $\mathcal{A}$ is an α-alphabet consisting of the letters appearing in the words w_i. A nanoword is a 1-component nanophrase. The rank of a nanophrase p (written $\operatorname{rank}(p)$) is the number of elements in its α-alphabet. We will sometimes write a nanophrase simply as $w_1|w_2|\dots|w_n$, omitting the α-alphabet. However it should not be forgotten that there is still a map from the letters in the nanophrase to α.

Example 1.1. Let α be the set $\{a, b\}$ and let $\mathcal{A}$ be the α-alphabet $\{A, B, C\}$ where $|A| = |C| = a$ and $|B| = b$. Then $(\mathcal{A}, ABC|AC|B)$ is a nanophrase over α and $(\mathcal{A}, ABBCAC)$ is a nanoword over α. Both $(\mathcal{A}, ABC|AC|B)$ and $(\mathcal{A}, ABBCAC)$ have rank 3.

Two nanophrases over α, $(\mathcal{A}, p)$ and $(\mathcal{B}, q)$, are isomorphic if there is a bijection f from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{B}$ which preserves the projection to α and, when applied letterwise to p, gives q.

Example 1.2. Let α be the set $\{a, b\}$. Let $\mathcal{A}$ be the α-alphabet $\{A, B, C\}$ where $|A| = |C| = a$ and $|B| = b$ and let $\mathcal{B}$ be the α-alphabet $\{D, E, F\}$ where $|D| = |F| = a$ and $|E| = b$. Then the nanophrases $(\mathcal{A}, ABC|AC|B)$ and $(\mathcal{B}, DEF|DF|E)$ are isomorphic. The corresponding bijection f takes A to D, B to E and C to F.

Let τ be a map from α to itself such that $\tau \circ \tau$ is the identity map (in other words, τ is an involution on α). Let S be a subset of $\alpha \times \alpha \times \alpha$. We call the triple

Date: January 11, 2010.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57M99; Secondary 68R15.

Key words and phrases. nanowords, nanophrases, homotopy, finite type invariants.

The first author is supported by a Scholarship from the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology of Japan. The second author is a Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science. This work was partly supported by KAKENHI.

(α, τ, S) a homotopy data triple [4]. Homotopy moves, based on the Reidemeister moves for classical knots, are defined as follows:

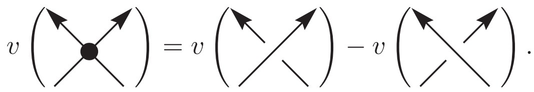
H1: $(\mathcal{A}, xAAy) \leftrightarrow (\mathcal{A} - \{A\}, xy)$
H2: $(\mathcal{A}, xAByBAz) \leftrightarrow (\mathcal{A} - \{A, B\}, xyz)$, if $|A| = \tau(|B|)$
H3: $(\mathcal{A}, xAByACzBCt) \leftrightarrow (\mathcal{A}, xBAyCAzCBt)$, if $(|A|, |B|, |C|) \in S$

Here, each lower case letter represents a sequence of letters, possibly including one or more '|' symbols which separate components in a nanophrase such that each side of each move is a nanophrase.

Homotopy is the equivalence relation on nanowords over α generated by isomorphism and the three homotopy moves. Note that picking a different homotopy data triple may give a different equivalence relation.

2. Finite type invariants

We first recall the definition of finite type invariants of classical links (originally given in [11]). Let G be an abelian group and let v be a classical link invariant taking values in G. We extend v to singular links by:



We say that v is a finite type invariant (Vassiliev invariant) if there exists a non-negative integer n such that for any singular link L which has more than n crossings, $v(L)$ is equal to 0. Kauffman considered this definition for virtual links [7].

Goussarov, Polyak and Viro defined finite type invariants for virtual links in a different way [6], which we now explain. Let $\mathcal{D}$ be the set of virtual link diagrams and let G be an abelian group. Let v be a virtual link invariant defined as a map from $\mathcal{D}$ to G. Extend v to $\mathbb{Z}\mathcal{D}$ linearly. A semi-virtual crossing is defined as follows:

(2.1)


The crossing on the left is a semi-virtual crossing, the crossing in the middle is a real crossing and the crossing on the right is a virtual crossing. Note that the semi-virtual crossing contains over-under crossing information. Goussarov, Polyak and Viro define v to be a finite type invariant if there exists a non-negative integer n such that for any virtual link diagram D which has more than n semi-virtual crossings, $v(D)$ is equal to 0.

We define finite type invariants for nanophrases in a similar way to Goussarov, Polyak and Viro. To do so, we define a singular letter which corresponds to a semi-virtual crossing. A *singular letter* is a letter which we marked with a dot: $\dot{A}$. A singular letter also has a map to α. A nanophrase with a singular letter is defined to be a linear sum of nanophrases as follows:

$$x\dot{A}y\dot{A}z = xAyAz - xyz$$

where $|\dot{A}| = |A|$. Note the similarity of this definition to Equation (2.1). We note that Fujiwara defined singular letters for nanowords associated with plane curves in exactly the same way [1].

We fix a homotopy data triple (α, τ, S) and thus fix a homotopy. Let G be an abelian group and let v be a homotopy invariant of nanophrases taking values in G. We extend v to linear sums of nanophrases over α by linearity. We say that v is a finite type invariant if there exists a non-negative integer n such that for any nanophrase p which has more than n singular letters, $v(p)$ is equal to 0. The minimum such n is called the *degree* of v.

If v is a finite type invariant of degree 0, then for any n-component nanophrase p, $v(p)$ is equal to $v(\emptyset_n)$. In particular, for nanowords, v is constant.

3. Degree 1

We recall the definition of the linking matrix of nanophrases defined by Fukunaga [2]. Fix α and τ. Let π be the multiplicative abelian group where the generators are the elements in α and for each element a of α there is a relation $a\tau(a) = 1$. For an n-component nanophrase p let $\mathcal{A}_{ij}$ be the set of letters which appear once in the ith component of p and once in the jth component of p. Let L be the $n \times n$ matrix with elements in π defined as follows. Write the elements of L as l_{ij}. Then l_{ii} is 1 for all i, and, for all i and j with i not equal to j, l_{ij} is given by

$$l_{ij} = \prod_{X \in \mathcal{A}_{ij}} |X|.$$

We call L the *linking matrix* of p. Fukunaga proved that L is a homotopy invariant of p irrespective of the choice of S in the homotopy data triple (α, τ, S) [2].

Example 3.1. Let α be the set $\{a, b\}$ and let $\tau(a) = b$ (and so $\tau(b) = a$). Let $\mathcal{A}$ be the α-alphabet $\{A, B, C\}$ where $|A| = |C| = a$ and $|B| = b$. Then

$$L(ABC|B|AC) = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} & a^2 \\ a^{-1} & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$L(AB|BAC|C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

As the matrices are not equal we can conclude that the nanophrases $ABC|B|AC$ and $AB|BAC|C$ are not homotopic.

Theorem 3.2 ([5])**.** *The linking matrix is a finite type invariant of degree* 1*. Any other finite type invariant of degree* 1 *can be calculated from the linking matrix.*

4. Degree 2

We recall the definition of Fukunaga's T invariant for nanophrases [2]. Let $p = (\mathcal{A}, w_1|w_2|\cdots|w_n)$ be an n-component nanophrase. For letters X and Y in $\mathcal{A}$ we define $n_p(X, Y)$ as follows. If X and Y appear alternating in p, we define $n_p(X, Y)$ to be 1 if the first X appears before the first Y and -1 if the first Y appears before the first X. If X and Y do not appear alternating (or X and Y are the same letter), we define $n_p(X, Y)$ to be 0. For a letter X in $\mathcal{A}$ and an element a of α we define $\varepsilon_a(X)$ by:

$$\varepsilon_a(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } |X| = a \\ -1 & \text{if } |X| = \tau(a) \neq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

For a letter X in $\mathcal{A}$ and two elements of α, a and b, we define $t_p(a, b, X)$ by

$$t_p(a, b, X) = \sum_{Y \in \mathcal{A}} \varepsilon_a(X)\varepsilon_b(Y)n_p(X, Y).$$

Let $\mathcal{A}_i(p)$ be the set of letters which appear exactly twice in w_i (the ith component of p). For i an integer between 1 and n inclusive and for two elements a and b of

α, we define $T^i_{a,b}(p)$ as follows:

$$T^i_{a,b}(p) = \begin{cases} \sum_{A \in \mathcal{A}_i(p)} t_p(a,b,A) \in \mathbb{Z} & \text{if } a \neq \tau(a) \text{ and } b \neq \tau(b) \\ \sum_{A \in \mathcal{A}_i(p)} t_p(a,b,A) \mod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

From the definition the following relation holds:

$$T^i_{a,b}(p) = -T^i_{\tau(a),b}(p) = -T^i_{a,\tau(b)}(p) = T^i_{\tau(a),\tau(b)}(p).$$

From each orbit of α under τ pick a representative element. Let α_o be the set of these representative elements. We write $T^i(p)$ for the tuple of elements $T^i_{a,b}(p)$ where a and b range over all of α_o. We then write $T(p)$ for the n-tuple

$$(T^1(p), T^2(p), \dots, T^n(p)).$$

Fukunaga proved that when S has the form $\{(a,a,a) \mid a \in \alpha\}$, $T(p)$ is a homotopy invariant of nanophrases [2].

Theorem 4.1 ([5]). *Fukunaga's T invariant is a finite type invariant of degree 2. However, there exists a finite type invariant of degree 2 (when S has the form $\{(a,a,a) \mid a \in \alpha\}$) which is independent of T.*

5. Universal invariant

Let $\mathcal{P}_r(\alpha)$ be the set of r-component nanophrases over α. Let G be an abelian group and let v be a homotopy invariant of r-component nanophrases over α taking values in G. The invariant v is said to be a universal invariant of degree n if, for any finite type invariant v' of degree less than or equal to n taking values in some abelian group H, there exists a map f such that this diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_r(\alpha) \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "v'"'] & G \arrow[d, "f"] \\ & H \end{tikzcd}$$

is commutative. Goussarov, Polyak and Viro defined a universal invariant for virtual links in [6]. In a similar way we define a universal invariant for nanophrases.

Let w be a nanoword. A nanoword u is a *subword* of w ($u \lhd w$) if u can be derived from w by deleting 0 or more letters.

Example 5.1. Let α be the set $\{a,b\}$ and let $|A| = a$ and $|B| = |C| = b$. Let w be the nanoword $ABCBAC$. Then the subwords of w are the following 8 nanowords: $ABCBAC$,$ABBA$,$ACAC$,$BCBC$,AA,BB,CC,$\emptyset$.

Let q be an n-component nanophrase. An n-component nanophrase p is a *subphrase* of q if p can be derived from q by deleting 0 or more letters.

Example 5.2. Let α be the set $\{a,b\}$ and let $|A| = a$ and $|B| = |C| = b$. Let q be the nanophrase $AB|CBA|C$. Then $AB|BA|\emptyset$ is a subphrase of q. Note that the nanophrase $AB|BA$ is not a subphrase of q because $AB|BA$ only has two components but q has three components.

Let $\mathbb{Z}\mathcal{P}_r(\alpha)$ be the free abelian group generated by $\mathcal{P}_r(\alpha)$. Let θ_r be the map from $\mathbb{Z}\mathcal{P}_r(\alpha)$ to itself defined as follows. For a nanophrase p, $\theta_r(p)$ is the sum of all the subphrases of p. We then extend this linearly to $\mathbb{Z}\mathcal{P}_r(\alpha)$.

Example 5.3. Let α be the set $\{a,b\}$ and let $|A| = a$ and $|B| = b$. Then

$$\theta_2(ABA|B) = ABA|B + AA|\emptyset + B|B + \emptyset|\emptyset.$$

Let $\mathbb{Z}\mathcal{I}_r(\alpha)$ be $\mathbb{Z}\mathcal{P}_r(\alpha)$ modulo isomorphism of nanophrases. The map θ_r induces a map from $\mathbb{Z}\mathcal{I}_r(\alpha)$ to itself which we also call θ_r.

The following relations are derived from the homotopy moves [5]:

R1: $xAAy = 0$, for any $|A|$
R2: $xAByBAz + xAyAz + xByBz = 0$, if $\tau(|A|) = |B|$
R3: $xAByACzBCt + xAByAzBt + xAyACzCt + xByCzBCt =$
$xBAyCAzCBt + xBAyAzBt + xAyCAzCt + xByCzCBt$,
if $(|A|, |B|, |C|) \in S$.

As for the homotopy moves, each lower case letter represents a sequence of letters, possibly including one or more '|' symbols which separate components in a nanophrase such that each term in each relation is a nanophrase. We also have a relation

$$\mathrm{R4}(n): \qquad p = 0, \text{ if } \operatorname{rank}(p) > n.$$

Let $G(\alpha, \tau, S, r)$ be $\mathbb{Z}\mathcal{I}_r(\alpha)$ modulo the relations R1, R2 and R3. Let $G_n(\alpha, \tau, S, r)$ be $G(\alpha, \tau, S, r)$ modulo the relation R4(n).

We define a map O_n from $\mathbb{Z}\mathcal{I}_r(\alpha)$ to itself as follows. For a nanophrase p we define $O_n(p)$ by:

$$O_n(p) = \begin{cases} p & \text{if } \operatorname{rank}(p) \leq n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We then extend this linearly to $\mathbb{Z}\mathcal{I}_r(\alpha)$. Define $\Gamma_{n,r}$ to be the map from $\mathbb{Z}\mathcal{P}_r(\alpha)$ to $G_n(\alpha, \tau, S, r)$ given by $O_n \circ \theta_r$.

Proposition 5.4 ([5])**.** *The map $\Gamma_{n,r}$ is a universal invariant of degree n.*

This proposition is a generalization of Theorem 2E in [6] in the case of open virtual knots.

The group $G_n(\alpha, \tau, S, r)$ depends on the choice of n, α, τ, S and r. A different choice of n, α, τ, S and r may give a different group. However, there are relations between these groups. We note a few of them here. From the definition it is immediately clear that $G_n(\alpha, \tau, S, r)$ is isomorphic to $G_{n+1}(\alpha, \tau, S, r)/\mathrm{R4}(n)$. Let S' is a subset of S. Then there is a surjective homomorphism from $G_n(\alpha, \tau, S', r)$ to $G_n(\alpha, \tau, S, r)$ [5]. Let (α, τ, S) be a homotopy data triple. Let β be a set and let f be a surjective map from α to β. In this case there is a surjective homomorphism from $G_n(\alpha, \tau, S, r)$ to $G_n(\beta, f \circ \tau, f(S), r)$ [5].

We explicity calculated some groups $G_2(\alpha, \tau, S, 1)$. In order to give our results we need the following definitions. As τ is an involution, orbits of α under τ contain either one element or two elements. If an orbit only contains one element, we say it is a *fixed* orbit. If an orbit contains two elements, we say it is a *free* orbit.

Theorem 5.5. *Fix α and τ. Let k be the number of fixed orbits of α under τ. Let l be the number of free orbits of α under τ. We write S_{diag} for $\{(a, a, a) \mid a \in \alpha\}$. Then we have*

$$\begin{array}{ccc} G_2(\alpha, \tau, \emptyset, 1) & \cong & \mathbb{Z}^{l^2+1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k^2+2kl} \\ \downarrow\!\!\!\!\downarrow & & \\ G_2(\alpha, \tau, S_{diag}, 1) & \cong & \mathbb{Z}^{l^2-l+1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k^2+2kl-k} \\ \downarrow\!\!\!\!\downarrow & & \\ G_2(\alpha, \tau, \alpha \times \alpha \times \alpha, 1) & \cong & \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k+l-1} \end{array}$$

where $\twoheadrightarrow$ denotes a surjective homomorphism.

6. Gauss words

Let α be a set with a single element a. In this case, the letters of any nanoword over α all map to a. Then there is no need to record the map to α and the α-alphabet is redundant. Thus we may simply consider any nanoword over α to be a Gauss word.

Let τ be the identity map and S be the set $\{(a,a,a)\}$. Then the homotopy data triple (α,τ,S) defines a homotopy on Gauss words which we call *Gauss word homotopy* (see [3]).

In [10], Turaev conjectured that Gauss word homotopy is trivial. In other words, he conjectured that every Gauss word is homotopic to the trivial Gauss word. However, the following theorem, which was proven independently by the first author in [3] and by Manturov in [8], shows that Turaev's conjecture is false.

Theorem 6.1 (G.; Manturov)**.** *There exist Gauss words which are not homotopic to the trivial Gauss word.*

Consider some other homotopy data triple $(\beta,\tau_\beta,S_\beta)$. We define a map f from the set of nanowords over β to the set of Gauss words as follows. For any nanoword over β, $(\mathcal{A},w)$, f maps $(\mathcal{A},w)$ to w. In other words, we forget the β-alphabet $\mathcal{A}$.

Let p and q be two nanophrases over β. If p and q are homotopic under the homotopy given by $(\beta,\tau_\beta,S_\beta)$, it is easy to check that $f(p)$ and $f(q)$ must be homotopic as Gauss words. From this we can conclude that any Gauss word homotopy invariant is an invariant for any homotopy of nanowords.

We will define a finite type invariant of degree 4 for Gauss words. In order to do so, we need to define some more notation.

Let u and w be Gauss words. We define the bracket $\langle u,w\rangle$ as follows:

$$\langle u,w\rangle := \sharp\{t \lhd w \mid t \text{ isomorphic to } u\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

where $\sharp$ means the number of elements in the set.

Example 6.2. We calculate $\langle DEDE, ABCBAC\rangle$. It is enough to calculate the subwords of $ABCBAC$ of rank 2 and check whether or not they are isomorphic to $DEDE$. The subwords of $ABCBAC$ of rank 2 are $ABBA$, $ACAC$ and $BCBC$. Of these, $ACAC$ and $BCBC$ are isomorphic to $DEDE$ and $ABBA$ is not. Thus $\langle DEDE, ABCBAC\rangle$ is 2.

From this calculation we also see that $\langle DEED, ABCBAC\rangle$ is 1.

We extend this bracket notation to allow a linear expansion of the first term as follows. For each i from 1 to m, let u_i be a Gauss word and let λ_i be an integer. Write x as $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots \lambda_m u_m$. Then $\langle x,w\rangle$ is defined by

$$\langle x,w\rangle = \lambda_1\langle u_1,w\rangle + \lambda_2\langle u_2,w\rangle + \cdots \lambda_m\langle u_m,w\rangle.$$

Example 6.3. From the calculation in Example 6.2, we have

$$\langle 2DEDE + DEED, ABCBAC\rangle = 5.$$

We define the Gauss words w_1 through to w_6 as follows:

$$\begin{aligned} w_1 &= ABACDCBD,\\ w_2 &= ABCACDBD,\\ w_3 &= ABCADBDC,\\ w_4 &= ABCBDACD,\\ w_5 &= ABCDBDAC,\\ w_6 &= ABCDCADB. \end{aligned}$$

Then we define v, a map from the set of Gauss words to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, by

$$v(w) = \langle \sum_{i=1}^{6} w_i, w \rangle \mod 2.$$

Theorem 6.4. *For Gauss words, there are no finite type invariants of degree* 1*,* 2 *or* 3*. There is only one finite type invariant of degree* 4 *which is given by* v*.*

It is simple to check that $v(\emptyset)$ is 0 and $v(w_1)$ is 1. Thus we can conclude that w_1 is not homotopic to the trivial word. This gives an alternate proof of Theorem 6.1.

References

[1] M. Fujiwara, *Finite type invariants of words and Arnold's invariants*, arXiv:math.GT/0808.3646.

[2] T. Fukunaga, *Homotopy classification of nanophrases with less than or equal to four letters*, arXiv:0904.3478.

[3] A. Gibson, *Homotopy invariants of Gauss words*, preprint, Tokyo Institute of Technology, 2008, arXiv:math.GT/0902.0062.

[4] ———, *Factorization of homotopies of nanophrases*, preprint, Tokyo Institute of Technology, 2009, arXiv:math.GT/0910.5281.

[5] A. Gibson and N. Ito, *Finite type invariants of nanowords and nanophrases*, in preparation.

[6] M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots*, Topology **39** (2000), no. 5, 1045–1068.

[7] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20** (1999), no. 7, 663–690.

[8] V. O. Manturov, *On free knots*, arXiv:math.GT/0901.2214.

[9] V. Turaev, *Knots and words*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 84098, 23.

[10] ———, *Topology of words*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **95** (2007), no. 2, 360–412.

[11] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, Theory of Singularities and Its Applications (V.I. Arnold, ed.), Advances in Soviet Math., vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1990.

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, Oh-okayama, Meguro, Tokyo 152-8551, Japan

E-mail address: gibson@math.titech.ac.jp

Department of Pure and Applied Mathematics, Waseda University, Tokyo 169-8555, Japan

E-mail address: noboru@moegi.waseda.jp

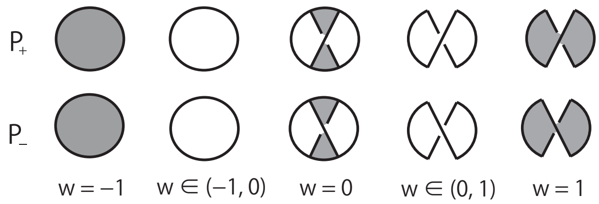
シート数を用いた standard projective plane の特徴づけについて

春田　力（東京大学大学院数理科学研究科）

1　はじめに

4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ に滑らかに埋め込まれた連結な閉曲面を **surface-knot** という。
特に、射影平面に同相なとき P^2**-knot**、2 次元球面に同相なとき S^2**-knot** と呼ぶ。
また、２つの surface-knot は、ambient isotopic な時、**同値**であるという。

次の motion picture で表される P^2-knot P_+、P_- を **standard projective plane** という。
（motion picture $\cdots$ $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ と見て、各 $\mathbb{R}^3 \times \{w\}$ と曲面の交わりを見ることで曲面を表したもの。）



P_+ および P_- はもっとも基本的な P^2-knot と考えられている。

定義 1.1 向き付け不可能な surface-knot F が**自明**であるとは、F がいくつかの P_+、P_- の連結和と同値であることを言う。

定義 1.2 向き付け可能な surface-knot F が**自明**であるとは、F が $\mathbb{R}^4$ でハンドル体の境界になっていることを言う。

normal Euler number と呼ばれる不変量が 0 のときは、向き付け不可能な F が自明であることと、（向き付け不可能な）ハンドル体の境界になっていることは、同値になることが知られている。

今回、シート数と呼ばれる不変量を用いることで、P_+ および P_- の一つの特徴づけを得た。
シート数に関しては、$sh(K) = 1$ となる S^2-knot K は自明なものに限ること、$sh(K) = 2$ または 3 を満たす S^2-knot は存在しないことが知られている [5, 6]。
一方、同様の事実が P^2-knot に対して成立するかどうかは知られていなかった。
次の定理 1.3 が今回の主結果になる。

定理 1.3 P^2-knot F に対し、
$sh(F) = 1 \Leftrightarrow F$ は P_+ または P_- に同値

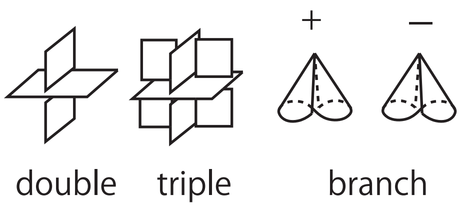
訂正 アブストラクトには、「P_+、P_- の特徴づけは知られていない」と書いたが、間違い [3]。

2 準備

図式について

$\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z)$ で定義される射影とする。
$\pi(F)$ の各点は、regular、double、triple または branch point のいずれかとしてよい。

$\pi(F)$ の double および triple point に沿って交差情報をつけたものを F の**図式**といい、D と書く。

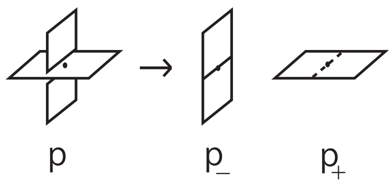


各 branch point には、交差情報に応じて、上のように符号を定義することができる。

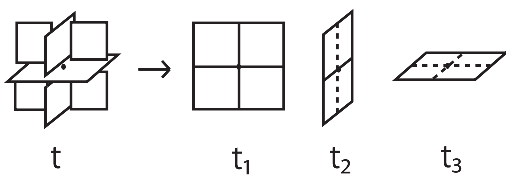
Remark 2.1 branch point の符号和は、normal Euler number と一致する。

シート数について

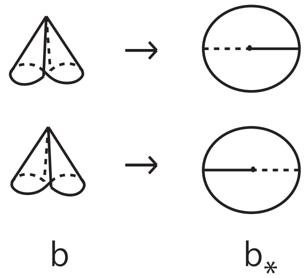
double point p に対し、$\pi^{-1}(p) \cap F$ は 2 点 $p_- \cup p_+$ になる。
p_- を lower point、p_+ を upper point という。



triple point t に対し、$\pi^{-1}(t) \cap F$ は 3 点 $t_1 \cup t_2 \cup t_3$ になる。
t_1 を bottom point、t_2 を middle point、t_3 を top point という。



branch point b に対し、$\pi^{-1}(b) \cap F$ は 1 点 b_* になる。
b_* も branch point と呼ぶ。



- lower、bottom、middle 及び branch point 全体の集合を $\Lambda_-(D)$、
- upper、middle、top 及び branch point 全体の集合を $\Lambda_+(D)$ とおく。

定義 2.2 ([4]) $F \setminus \Lambda_-(D)$ の成分数を D のシート数といい、$sh(D)$ と書く。F のすべての図式における $sh(D)$ の最小値を F のシート数といい、$sh(F)$ と書く。

D の double、triple 及び branch point 全体の集合を $\Gamma(D)$ とおく。また、D の triple point の数を $t(D)$ とおく。
$\Gamma(D)$ は、immersed circle および arc の和になっている。また、定義から $\pi^{-1}(\Gamma(D)) \cap F = \Lambda_-(D) \cup \Lambda_+(D)$ が成立する。

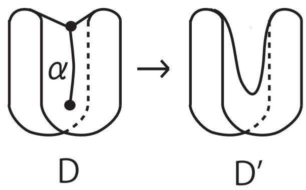
P^2-knot の normal Euler number は ± 2 であること、および Remark 2.1 より、P^2-knot F の図式 D には、両端の branch point の符号が同じになるような double point arc が 1 つは存在する。

補題 2.3 D を P^2-knot F の図式とする。
両端の branch point の符号が同じ double point arc α で、triple point を通らないものがあるとする。この時、ある S^2-knot K と K の図式 D' が存在して、

(i) $sh(D') = sh(D)$、
(ii) $F = P_\varepsilon \# K$

を満たす。ここで、P_ε は P_+ または P_- のどちらか。

補題 2.3 の証明。 α の近傍 N は下図の左の通り。



N を取り除き、右図のように 2-disc でふたをする。これは、F からメビウスの帯を取り除き、2-disc でふ

たをすることに対応する。また、N に 2-disc でふたをしたものは P_ε ($\varepsilon \in \{\pm 1\}$) になることから、できた図式が求める D' になる。 ∎

$F = P_\varepsilon \# K$ となっているとき、もし K が自明なら、F は P_ε に同値になる。このことから、次が分かる。

補題 2.4 $sh(D) = 1$、$t(D) = 0 \Rightarrow F$ は P_ε に同値。

補題 2.4 の証明。 Remark 2.1 と補題 2.3 から、F は P_ε と $sh(K) = 1$ を満たす S^2-knot K との連結和になっている。$sh(K) = 1$ より、K は自明。 ∎

3 triple point の消去

$\Lambda_-(D)$ は branch point を 1 価、middle point を 2 価、bottom point を 4 価頂点とするグラフと見ることができる。

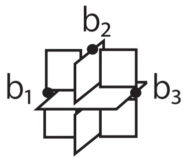
$\Lambda_-(D)$ の 2 つの頂点が**となり合う**とは、ある辺で結ばれていることを言う。

補題 3.1 ある bottom point t_1 に、3 つの branch point b_1、b_2、b_3 がとなり合っているとする。この時、次の (i) または (ii) が成り立つ。

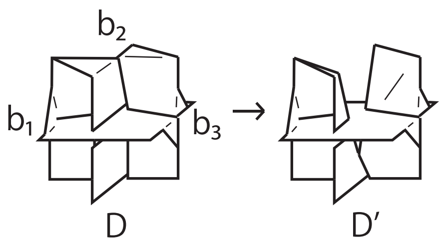
(i) F の図式 D' で、$sh(D') = sh(D)$、$t(D') = t(D) - 1$ を満たすものが存在する。
(ii) ある S^2-knot K の図式 D'' で、$sh(D'') \leq sh(D) + 1$、$F = P_\varepsilon \# K$ を満たすものが存在する。

補題 3.1 の証明の概要

(I) b_1、b_2、b_3 が図の位置についているとき。

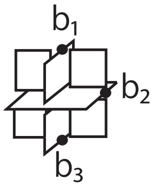


b_2 を押し込むことで、(i) を満たす D' が得られる。



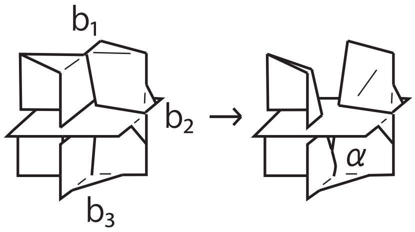
(II) b_1、b_2、b_3 が図の位置についているとき。

(II)-1 b_1 と b_3 の符号が違うとき。
(i) を満たす D' が存在する [5]。



(II)-2 b_1 と b_3 の符号が同じとき。

b_1 を押し込むことで、両端の branch point の符号が同じであるような double point arc α で、triple point を通らないものができる。



この操作で得られた図式のシート数は $sh(D)+1$ 以下になり、補題 2.3 から、(ii) が成立する。

以上から、補題 3.1 が成り立つ。 ∎

命題 3.2 middle point t_2 と、branch point b がとなり合うとする。
このとき、F の図式 D' で、$sh(D')=sh(D)$、$t(D')=t(D)-1$ を満たすものが存在する。

命題 4 の証明の概要。 b を押し込むことで、求める D' が得られる。 ∎

4 定理 1.3 の証明のアウトライン

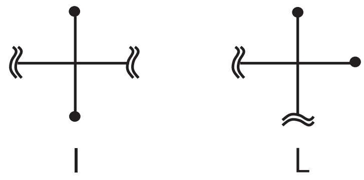
定理 1.3 の証明のおおよそのあらすじは以下のようになる。

D を P^2-knot F の図式で、$sh(D)=1$ を満たすものとする。この時、F が P_ε に同値であることを示す。
$sh(D)=1$ より、$H_1(\Lambda_-(D))$ は、$\{e\}$ か $\mathbb{Z}$ に同型になる。

$\underline{H_1(\Lambda_-(D))\cong\{e\}\text{ のとき。}}$ 補題 3.1 および命題 3.2 から、F の図式 D' で $t(D')=0$ を満たすものが存在する。補題 2.4 から、F は P_ε に同値。

$\underline{H_1(\Lambda_-(D))\cong\mathbb{Z}\text{ のとき。}}$ 補題 3.1 および命題 3.2 から、各 bottom point が次のどちらかになっている時を考えれば十分。

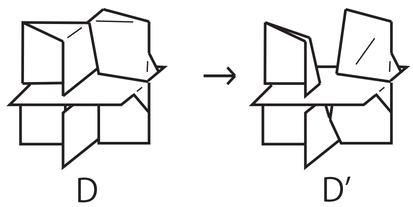
- I 型 $\cdots$ t_1 と隣り合う branch point の数が 2 個で、図のようにつく。
- L 型 $\cdots$ t_1 と隣り合う branch point の数が 2 個で、図のようにつく。



命題 4.1 今の状況で L 型の bottom point があったとする。この時、F の図式 D' で、次を満たすものが存在する。

(i) $H_1(\Lambda_-(D')) \cong \{e\}$ または $\mathbb{Z}$
(ii) $t(D') = t(D) - 1$

命題 4.1 の証明の概要。 図のように branch point を押し込む操作を行う。



この時の Λ_- の変化を詳しく見ると、$H_1(\Lambda_-(D')) \cong \{e\}$ または $\mathbb{Z}$ となることが分かる。 ∎

命題 4.1 から、「各 bottom point が I 型かつ $H_1(\Lambda_-(D')) \cong \mathbb{Z}$ を満たす P^2-knot の図式 D' が、P_ε を表す」ことを示せばよい。 このような D' のシート数は 1 または 2。

- $sh(D') = 2$ のとき。シート数を増やさないようにして triple point を消すことができ、補題 2.3 から、F が P_ε と $sh(K) \leq 2$ を満たす S^2-knot K との連結和になっている。$sh(K) \leq 2$ から、K は自明。
- $sh(D') = 1$ のとき。$\Gamma(D')$ の形をみると、BW orientation をつけることができないことが分かる。よって、このようなことは起こらない。

以上から、定理 1.3 が成り立つ。 ∎

今後の課題としては、以下のようなものが考えられる。

問題 4.2 非自明な P^2-knot のうち、シート数が最小のものは何か？
特に、シート数 2 または 3 のものはあるか？

参考文献

[1] F. Hosokawa and A. Kawauchi, *Proposals for unknotted surfaces in four-spaces*, Osaka J. Math. **16** (1979), no. 1, 233–248.
[2] S. Kamada, *Nonorientable surfaces in 4-space*, Osaka J. Math. **26** (1989), no. 2, 367–385.

[3] T. M. Price, *Spanning surfaces for projective planes in four space*, Pacific J. Math. **89** (1980), no. 1, 169–179.

[4] M. Saito and S. Satoh, *The spun trefoil needs four broken sheets*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), no. 7, 853–858.

[5] S. Satoh, *Triviality of* 2*-knot with one or two sheets*, to appear in Kyushu J. Math.

[6] S. Satoh, *Triviality of* 2*-knot with three sheets*, preprint.

SURFACE LINKS WITH FREE ABELIAN LINK GROUPS

Inasa Nakamura

0 Introduction

Closed 1-manifolds embedded locally flatly in the Euclidean 3-space $\mathbb{R}^3$ are called *classical links*, and closed 2-manifolds embedded locally flatly in the Euclidean 4-space $\mathbb{R}^4$ are called *surface links*. A surface link whose each component is of genus zero (resp. one) is called a 2-*link* (resp. T^2-*link*). Two classical links (resp. surface links) are *equivalent* if one is carried to the other by an ambient isotopy of $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^4$).

It is known that if a classical link group is a free abelian group, then its rank is at most two (cf. [8] Theorem 6.3.1). It is also known that a μ-component 2-link group for $\mu > 1$ is not a free abelian group (cf. [4] Corollary 2 of Chapter 3).

In this paper in Section 2 we give examples of surface links whose link groups are free abelian groups of rank three (Theorem 2.1) or four (Theorem 2.2). These examples are link groups of *torus-covering* T^2-*links*, which are T^2-links in $\mathbb{R}^4$ which can be described in braid forms over the standard torus (see Definition 1.5).

In Section 3 we study the torus-covering-links S_n of Theorem 2.1, i.e. the torus-covering T^2-links whose link groups are free abelian groups of rank three, where n are integers. Computing triple linking numbers, we show that S_n is not equivalent to S_m if $n \neq m$ (Theorem 3.1). We can moreover determine the triple point number of S_n of Theorem 2.1. In fact, the triple point number of S_n is $4n$ for $n > 0$ and $4|n| + 4$ for $n \leq 0$, and its associated torus-covering-chart $\Gamma_{T,n}$ realizes the surface diagram with triple points whose number is the triple point number (Theorem 3.3).

The author would like to thank Professor Shin Satoh for his useful advice.

1 Definitions and Preliminaries

Definition 1.1. A closed locally flatly embedded 2-manifold in $\mathbb{R}^4$ is called a *surface link*. A surface link with one component is called a *surface knot*.

Definition 1.2. S is a *braided surface* of degree m if S is an compact and oriented 2-manifold, embedded properly and locally flatly in $D_1^2 \times D_2^2$ and satisfies the following:
(i) $\mathrm{pr}_2|_S : S \longrightarrow D_2^2$ is a branched covering map of degree m,
(ii) ∂S is a closed m-braid in $D_1^2 \times D_2^2$,
where D_1^2, D_2^2 are 2-disks, and $\mathrm{pr}_2 : D_1^2 \times D_2^2 \longrightarrow D_2^2$ is the projection to the second factor. The braided surface S is called a *surface braid* if ∂S is the trivial closed braid. Moreover, S is called *simple* if every singular index is two.

There is a *chart* which represents a simple surface braid.

Definition 1.3. Let m be a positive integer, and Γ be a graph on a 2-disk D_2^2. Then Γ is called a *surface link chart* of degree m if it satisfies the following conditions:

(i) $\Gamma \cap \partial D_2^2 = \emptyset$.

(ii) Every edge is oriented and labeled, and the label is in $\{1, \ldots, m-1\}$.

(iii) Every vertex has degree 1, 4, or 6.

(iv) At each vertex of degree 6, there are six edges adhering to which, three consecutive arcs oriented inward and the other three outward, and those six edges are labeled i and $i+1$ alternately for some i.

(v) At each vertex of degree 4, the diagonal edges have the same label and are oriented coherently, and the labels i and j of the diagonals satisfy $|i-j| > 1$ (Fig. 1).

A vertex of degree 1 (resp. 6) is called a *black vertex* (resp. *white vertex*). A black vertex (resp. white vertex) in a chart corresponds to a branch point (resp. triple point) in the surface diagram of the associated simple surface braid by the projection pr_2.

A chart with a boundary represents a simple braided surface.

There is a notion of *C-move equivalence* between two charts of the same degree. The following theorem is well-known.

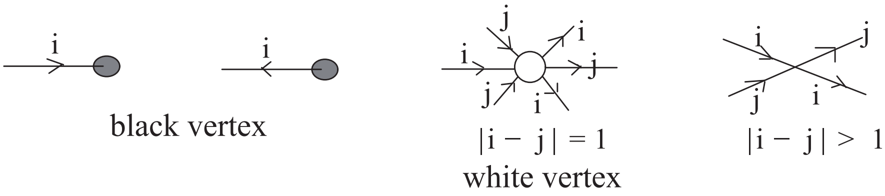


Figure 1: Vertices in a chart

Theorem 1.4 ([6, 7])**.** *Two charts of the same degree are C-move equivalent if and only if their associated simple braided surfaces are equivalent.*

Now we will give the definition of *torus-covering-links* (cf. [9]).

Definition 1.5. Let D^2 be a 2-disk, and S^1 a circle. First, embed $D^2 \times S^1 \times S^1$ into $\mathbb{R}^4$ naturally, and identify $D^2 \times S^1 \times S^1$ with $D^2 \times I_3 \times I_4/\sim$, where $(x, 0, v) \sim (x, 1, v)$ and $(x, u, 0) \sim (x, u, 1)$ for $x \in D^2$, $u \in I_3 = [0, 1]$ and $v \in I_4 = [0, 1]$.

Let us consider a surface link S embedded in $D^2 \times S^1 \times S^1$ such that $S \cap (D^2 \times I_3 \times I_4)$ is a simple braided surface. We call S a *torus-covering-link*. In particular, if each component of a torus-covering-link is of genus one, then we call it a *torus-covering T^2-link*.

A torus-covering-link is associated with a chart on the standard torus, i.e. a chart Γ_T in $I_3 \times I_4$ such that $\Gamma_T \cap (I_3 \times \{0\}) = \Gamma_T \cap (I_3 \times \{1\})$ and $\Gamma_T \cap (\{0\} \times I_4) = \Gamma_T \cap (\{1\} \times I_4)$. Denote the classical braids represented by $\Gamma_T \cap (I_3 \times \{0\})$ and $\Gamma_T \cap (\{0\} \times I_4)$ by a and b respectively. We will call Γ_T a *torus-covering-chart with boundary braids a and b*. In particular, a torus-covering T^2-link is associated with a torus-covering-chart without black vertices, and the torus-covering T^2-link is determined from the boundary braids a and b, which are commutative. In this case we will call Γ_T a torus-covering-chart *without black vertices and with boundary braids a and b*.

We can compute link groups of torus-covering T^2-links.

Lemma 1.6 ([9] Lemma 3.4)**.** *Let Γ_T be a torus-covering-chart of degree m without black vertices, and with its boundary braids a and b. Let S be the torus-covering-link associated with Γ_T. Then the link group of S is obtained as follows:*

$$\pi_1(\mathbb{R}^4 - S) = \langle x_1, \ldots, x_m \mid x_j = \mathrm{Artin}(a)(x_j) = \mathrm{Artin}(b)(x_j),\ j \in \{1, 2, \ldots, m\}\rangle,$$

where $\mathrm{Artin}(a) : F_m \to F_m$ *(resp.* $\mathrm{Artin}(b)$*) is Artin's automorphism of the free group $F_m = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ associated with the m-braid a (resp. b).*

2 Surface links whose link groups are free abelian

There are torus-covering T^2-links whose link groups are free abelian groups of rank three (Theorem 2.1) or four (Theorem 2.2).

Theorem 2.1. *Let $\Gamma_{T,\,n}$ be the torus-covering-chart of degree 3 without black vertices and with boundary braids $\sigma_1^2\sigma_2^{2n}$ and Δ^2, where $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ (Garside's Δ) and n is an integer. Then the torus-covering T^2-link S_n associated with $\Gamma_{T,n}$ has the link group $\pi_1(\mathbb{R}^4 - S_n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Theorem 2.2. *Let Γ_T be the torus-covering-chart of degree 4 without black vertices and with boundary braids $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2$ and Δ^2, where $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ (Garside's Δ). Then the torus-covering T^2-link S associated with Γ_T has the link group $\pi_1(\mathbb{R}^4 - S) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Proof of Theorems 2.1 and 2.2. Compute the link group using Lemma 1.6. □

3 The surface links of Theorem 2.1

As surface links which can be made from classical links, there are *spun T^2-links, turned spun T^2-links*, and *symmetry-spun T^2-links*. Consider $\mathbb{R}^4$ as obtained by rotating $\mathbb{R}^3_+$ around the boundary $\mathbb{R}^2$. Then a *spun T^2-link* is obtained by rotating a classical link (cf. [1]), a *turned spun T^2-link* by turning a classical link once while rotating it (cf. [1]), and a *symmetry-spun T^2-link* by turning a classical link with periodicity rationally while rotating (cf. [11]). By definition, torus-covering-links include symmetry-spun T^2-links. Indeed, a symmetry-spun T^2-link is represented by a torus-covering-chart with no (black nor white nor degree-four) vertices.

It is well-known that if a classical link group is isomorphic to $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, then it is a Hoph link. On the other hand, by definition, the torus-covering T^2-link associated with a torus-covering-chart of degree 2 is a symmetry-spun T^2-link. Here it is known that a symmetry-spun T^2-link is either the spun T^2-link or the turned spun T^2-link of a classical link, say L, and the link group of the spun (or turned spun) T^2-link of L is isomorphic to the classical link group of L (cf. [11]). Hence we can see that if a torus-covering T^2-link has the link group $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ and moreover it is associated with a torus-covering-chart of degree 2, then it is either the spun or the turned spun T^2-link of a Hoph link. Thus for the torus-covering T^2-links with the link group $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ which are associated with torus-covering-charts of degree 2, there are just a finite number of link types.

Then what about the torus-covering T^2-links of Theorem 2.1? Are the number of the link types of them finite? The answer is no.

Theorem 3.1. *For the torus-covering T^2-links of Theorem 2.1, S_n and S_m are not equivalent for $n \neq m$, where n and m are integers.*

Before the proof, we give the definition of the *triple linking numbers*([2]). Let $F = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ be an oriented surface link such that $K_i, i = 1, \ldots, n$, are components.

Let $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ be a generic projection. In the surface diagram $D = \pi(F)$, there are two intersecting sheets along each double point curve, one of which is higher than the other with respect to π. They are called the *over sheet* and the *under sheet* along the double point curve, respectively. In order to indicate crossing information of the surface diagram, we break the under sheet into two pieces missing the over sheet. This can be extended around a triple point. Around a triple point, the sheets are called the *top sheet*, the *middle sheet*, and the *bottom sheet* from the higher one. Then the surface diagram is presented by a disjoint union of compact surfaces which are called *broken sheets*. We denote by $B(D)$ the set of broken sheets of D.

At a triple point of D, there exist broken sheets $J_1,\ J_2,\ J_3 \in B(D)$ uniquely such that J_1 is the bottom sheet, J_2 is the middle sheet, J_3 is the top sheet and the normal vector of J_2 (resp. J_3) points from J_1 (resp. J_2). The *sign* of the triple point is *positive* or $+1$ (resp. *negative* or -1) if the triplet of the normal vectors of $J_1,\ J_2,\ J_3$ is right-handed (resp. left-handed).

If D has a corresponding chart, this corresponds to the following (cf. [3] Proposition 4.43 (3)). The white vertex is positive (resp. negative) if $j > i$ (resp. $i > j$), i.e. if there is exactly one edge with the larger (resp. smaller) label oriented toward the white vertex.

Definition 3.2. Let $T_{\pm}(i, j, k)$ denote the number of positive and negative, respectively, triple points such that the top, middle, and bottom sheets are from components K_i, K_j, and K_k respectively. Such a triple point is called of type (i, j, k). Then define $T(i, j, k) = T_+(i, j, k) - T_-(i, j, k)$. Then the numbers $T(i, j, k)$ with $i \neq j$ and $j \neq k$ are invariants of isotopy classes of F, which we call the *triple linking numbers*.

Proof of Theorem 3.1. First let us consider the case when n is a non-negative integer. Let us denote by K_i the component consisting of the ith sheet of the braided surface associated with the torus-covering-chart $\Gamma_{T,n}$. Then the diagrams of the vertical boundary braid $\sigma_1^2\sigma_2^{2n}$ and the horizontal boundary braid $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$ is as in Fig.s 2 and 3, where $a = 1$, $b = 2$ and

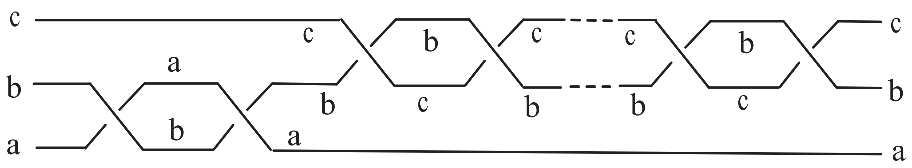


Figure 2: The braid $\sigma_1^2\sigma_2^{2n}$, if $n \geq 0$

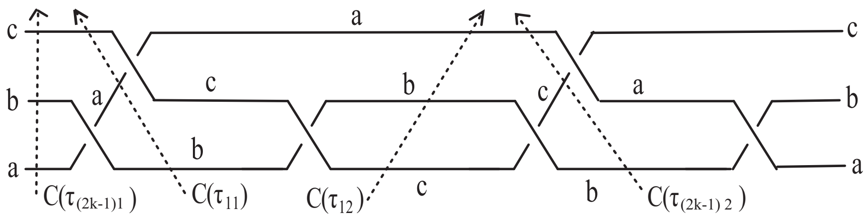


Figure 3: The braid for $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$

$c = 3$. We can draw the part of the torus-covering-chart without black vertices and with boundary braids σ_1 and $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$ such that it has two white vertices as in Fig. 4. Denote them by τ_{i1} and τ_{i2} from left to right as in Fig. 4, where $i = 1, 2$. The types $C(\tau_{11})$ and $C(\tau_{12})$ of the first two white vertices τ_{11} and τ_{12} are obtained from reading the numbers along the dotted paths in Fig. 3. Since there is exactly one edge with the larger (resp. smaller) label, i.e. the label 2 (resp. the label 1) oriented toward τ_{11} (resp. τ_{12}), we see that the sign of τ_{11} (resp. τ_{12}) is positive (resp. negative). Thus the signs and types are $+(b, a, c)$ for τ_{11} and $-(c, b, a)$ for τ_{12}. Similarly, the color of τ_{21} (resp. τ_{22}) is obtained from that of τ_{11} (resp. τ_{12}) by exchanging a and b, and the sign of τ_{21} (resp. τ_{22}) is the same with that of τ_{11} (resp. τ_{12}). Thus we can see that the signs and types are $+(a, b, c)$ for τ_{21} and $-(c, a, b)$ for τ_{22}.

Similarly, We can draw the part of the torus-covering-chart without black vertices and with boundary braids σ_2 and $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$ such that it has two white vertices as in Fig. 5. Denote these by τ_{i1} and τ_{i2} for $i = 3, 4, \ldots, 2n+2$ as in Fig. 5. Then the signs and the types are $-(a, b, c)$ for $\tau_{(2k-1)1}$, $+(b, c, a)$ for $\tau_{(2k-1)2}$, $-(a, c, b)$ for $\tau_{(2k)1}$, and $+(c, b, a)$ for $\tau_{(2k)2}$, where $k = 2, 3, \ldots, n + 1$. Fig. 3 shows the types of $\tau_{(2k-1)1}$ and $\tau_{(2k-1)2}$, and the color of $\tau_{(2k)1}$ (resp. $\tau_{(2k)2}$) is obtained from $\tau_{(2k-1)1}$ (resp. $\tau_{(2k-1)2}$) by exchanging b and c.

Since τ_{ij} for $i = 1, 2, \ldots, 2n + 2$ and $j = 1, 2$ are all the white vertices

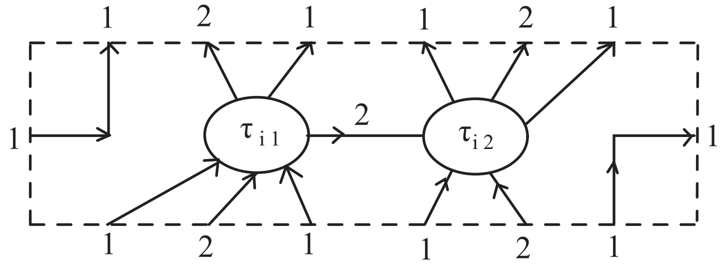


Figure 4: White vertices τ_{i1} and τ_{i2}, where $i = 1, 2$

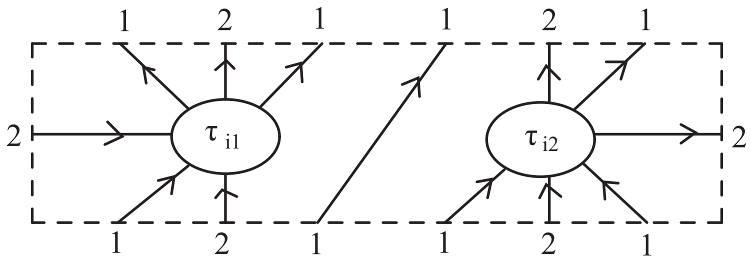


Figure 5: White vertices τ_{i1} and τ_{i2} $(i = 3, 4, \ldots, 2n+2)$, if $n > 0$

of $\Gamma_{T,n}$, we have the triple linking numbers as follows. We will consider $T_n(i,j,k) = T(i,j,k)$ with $\{i,j,k\} = \{a,b,c\}$:

$$\begin{aligned}
&T_n(a,b,c) = -n+1, \quad T_n(a,c,b) = -n, \\
&T_n(b,a,c) = 1, \quad T_n(b,c,a) = n, \\
&T_n(c,a,b) = -1, \quad T_n(c,b,a) = n-1. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

for $n \geq 0$.

Similarly, we can see that the triple linking numbers (3.1) hold for $n < 0$, too. Thus we see that the triple linking numbers are different for $n \neq m$. □

The triple point number of a surface link F is the minimum number of triple points in a surface diagram of F, for all the surface diagrams. Since $\sum |T(i,j,k)|$ is smaller than or equal to the triple point number of F, we can moreover determine the triple point number of S_n.

Theorem 3.3. *The triple point number of S_n of Theorem 2.1 is is $4n$ for $n > 0$ and $4|n| + 4$ for $n \leq 0$, and its associated torus-covering-chart $\Gamma_{T,n}$ realizes the surface diagram with triple points whose number is the triple point number.*

References

[1] J. Boyle, *The turned torus knot in* S^4, J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), 239–249.

[2] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947–3989.

[3] J. S. Carter and M. Saito, *Knotted surfaces and their diagrams*, Mathematical Surveys and Monographs 55, Amer. Math. Soc., 1998.

[4] J. Hillman, 2-Knots and their Groups, Australian Mathematical Society Lecture Series. 5, Cambridge University Press, 1989.

[5] D. Joyce, *A classical invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), 37–65.

[6] S. Kamada, *An observation of surface braids via chart description*, J. Knot Theory Ramifications **4** (1996), 517–529.

[7] S. Kamada, Braid and Knot Theory in Dimension Four, Math. Surveys and Monographs 95, Amer. Math. Soc., 2002.

[8] A. Kawauchi, A Survey of Knot Theory, Birkhäuser Verlag, 1996, originally Knot Theory, Springer-Verlag, Tokyo, 1990.

[9] I. Nakamura, *Surface links which are coverings over the standard torus*, arXiv:math.GT/0905.0048 v3.

[10] I. Nakamura, *Surface links with free abelian link groups*, arXiv:math.GT/0911.4235 v1.

[11] M. Teragaito: *Symmetry-spun tori in the four sphere*, Knots 90, 163–171.

Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo
inasa@ms.u-tokyo.ac.jp