幾何学 II B 補足１（作成　谷山公規）

連続写像の貼り合わせの際によく使われる次の命題を証明する。

6.3 命題　X と Y を位相空間、A と B をともに X の閉集合（または、ともに X の開集合）で $X = A \cup B$ とし、$f : X \to Y$ を写像とする。もしも制限写像 $f|_A : A \to Y$、$f|_B : B \to Y$ がともに連続ならば、f も連続である。

証明

A と B がともに X の閉集合である場合について示す。A と B がともに X の開集合である場合も同様である。F を Y の閉集合としたときに、$f^{-1}(F)$ が X の閉集合であることを示せばよい。$f|_A : A \to Y$ が連続であるという仮定より $(f|_A)^{-1}(F)$ は A の閉集合である。A が X の閉集合なので、$(f|_A)^{-1}(F)$ は X の閉集合でもある。$f|_B : B \to Y$ が連続であるという仮定より $(f|_B)^{-1}(F)$ は B の閉集合である。B が X の閉集合なので、$(f|_B)^{-1}(F)$ は X の閉集合でもある。よって $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = (f|_A)^{-1}(F) \cup (f|_B)^{-1}(F)$ も X の閉集合である。□