

等化位相空間 (別名 商位相空間) の考察の際によく使われる次の命題を証明する。

3.5 命題 $(X, \mathcal{D}_X), (Y, \mathcal{D}_Y)$ を位相空間、 $f : X \rightarrow Y$ を全射連続写像とする。 X 上の同値関係 \sim を $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ で定義する。 $(X/\sim, \mathcal{D}_{X/\sim})$ をこの同値関係に関する (X, \mathcal{D}_X) の等化位相空間とする。 $\hat{f} : X/\sim \rightarrow Y$ を $\hat{f}([x]) = f(x)$ で定義する。 f が開写像であるかまたは閉写像であるならば、 \hat{f} は $(X/\sim, \mathcal{D}_{X/\sim})$ と (Y, \mathcal{D}_Y) の間の同相写像である。

証明

(1) \hat{f} が全射であること。 任意の $y \in Y$ に対して f の全射性より $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ を満たす。 よって $\hat{f}([x]) = y$ となり \hat{f} は全射である。

(2) \hat{f} が単射であること。 $\hat{f}([x_1]) = \hat{f}([x_2])$ とすると $f(x_1) = \hat{f}([x_1]) = \hat{f}([x_2]) = f(x_2)$ より $x_1 \sim x_2$ つまり $[x_1] = [x_2]$ となり \hat{f} は単射であることが示された。

(3) \hat{f} が連続であること。 $O \in \mathcal{D}_Y$ としたとき $\hat{f}^{-1}(O) \in \mathcal{D}_{X/\sim}$ を示せばよい。 $\varphi : X \rightarrow X/\sim$ を $\varphi(x) = [x]$ で定義される自然な射影とする。 $f(x) = \hat{f}([x]) = \hat{f}(\varphi(x))$ より $f = \hat{f} \circ \varphi$ である。 よって $f^{-1}(O) = (\hat{f} \circ \varphi)^{-1}(O) = \varphi^{-1}(\hat{f}^{-1}(O))$ である。 f は連続なので $f^{-1}(O) \in \mathcal{D}_X$ である。 よって $\varphi^{-1}(\hat{f}^{-1}(O)) \in \mathcal{D}_X$ である。 よって等化位相の定義より $\hat{f}^{-1}(O) \in \mathcal{D}_{X/\sim}$ である。

(4) \hat{f} の逆写像 \hat{f}^{-1} が連続であること。

(Case A) f が開写像である場合。 \hat{f}^{-1} が連続であることの定義は \hat{f}^{-1} による開集合の逆像が開集合であることであるが、今 \hat{f}^{-1} は全単射なので、これは \hat{f} が開写像であることと同値である。 $O \in \mathcal{D}_Y$ とする。 $\hat{f}^{-1}(O) \in \mathcal{D}_{X/\sim}$ を示せばよい。 $\hat{f}^{-1}(O) = \varphi^{-1}(O)$ であることはすぐに分かる。 等化位相の定義から $\varphi^{-1}(O) \in \mathcal{D}_X$ である。 よって f は開写像なので $f(\varphi^{-1}(O)) \in \mathcal{D}_Y$ である。

(Case B) f が閉写像である場合。 \hat{f}^{-1} が連続であることの定義は \hat{f}^{-1} による開集合の逆像が開集合であることであるが、これは \hat{f}^{-1} による閉集合の逆像が閉集合であることと同値であり、今 \hat{f}^{-1} は全単射なので、これは \hat{f} が閉写像であることと同値である。 F を X/\sim の閉集合とする。 $\hat{f}^{-1}(F)$ が Y の閉集合であることを示せばよい。 $\hat{f}^{-1}(F) = \varphi^{-1}(F)$

であり、 φ が連続であることから $\varphi^{-1}(F)$ は X の閉集合である。仮定から f は閉写像なので $f(\varphi^{-1}(F))$ も閉集合となる。

以上により \hat{f} が同相写像であることが証明された。□