幾何 II§2 補足（作成　谷山公規）

ここでは平面上のなめらかな凸閉曲線を台に持つビリヤードは２以上の任意の自然数 n に対して n-閉軌道（n 回反射して元に戻る軌道）を持つことを証明しよう。

平面 R^2 上の単位円周 $S^1 = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ と同相な位相空間を**単純閉曲線（simple closed curve）**または単に**円周（circle）**という。

平面上の単純閉曲線 Γ は、その各点において局所的に C^r 級関数 $y = f(x)$ のグラフか、C^r 級関数 $x = g(y)$ のグラフによって表せるときに C^r 級であるという。正確な定義は以下のようになる。

単純閉曲線 $\Gamma \subset R^2$ が C^r 級であるとは、任意の点 $(a,b) \in \Gamma$ に対して (a,b) の Γ における近傍 N が存在して次の（１）（２）のうち少なくとも一方が成立するときを云う。

（１）ある $\varepsilon > 0$ と開区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 上で定義されたある実数値 C^r 級関数 f が存在して、$N = \{(x, f(x)) | x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ となる。

（２）ある $\varepsilon > 0$ と開区間 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 上で定義されたある実数値 C^r 級関数 g が存在して、$N = \{(g(x), x) | x \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\}$ となる。

例　$S^1 = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ は点 $(1,0)$ の近くでは $x = \sqrt{1-y^2}$ のグラフになっていて、点 $(0,1)$ の近くでは $y = \sqrt{1-x^2}$ のグラフになっている。これらの関数は 0 の近くで C^∞ 級なので、S^1 は C^∞ 級であることが分かる。

注）一般には C^r 級の定義は C^r 級微分多様体の中の C^r 級部分多様体、もしくは C^r 級微分多様体から C^r 級微分多様体への C^r 級 immersion（の像）としてなされる。R^2 を普通に C^r 級微分多様体だと思ったときにその C^r 級１次元部分多様体は、陰関数定理から、上記のように C^r 級関数のグラフとして表せることが分かる。詳しくは微分多様体の教科書、例えば　「多様体の基礎」松本幸夫著、東京大学出版会　を参照されたい。

C^1 級単純閉曲線 $\Gamma \subset R^2$ が凸であるとは、Γ の任意の接線に対して Γ はその接線が分ける R^2 の２つの部分のうちの片方に含まれるときを云う。

本稿では次の定理を証明しよう。

定理　平面上の C^1 級凸単純閉曲線を台とするビリヤードは 2 以上の任意の自然数 n に対して n-閉軌道を持つ。

定理の証明　R^2 上の 2 点 $A=(a_x,a_y), B=(b_x,b_y)$ に対して $\overline{AB}=\sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2}$ とおく。$\Gamma\subset R^2$ を C^r 級凸単純閉曲線とする。Γ 上の n 点 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\Gamma$ で $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}$ が最大となるものを取る。

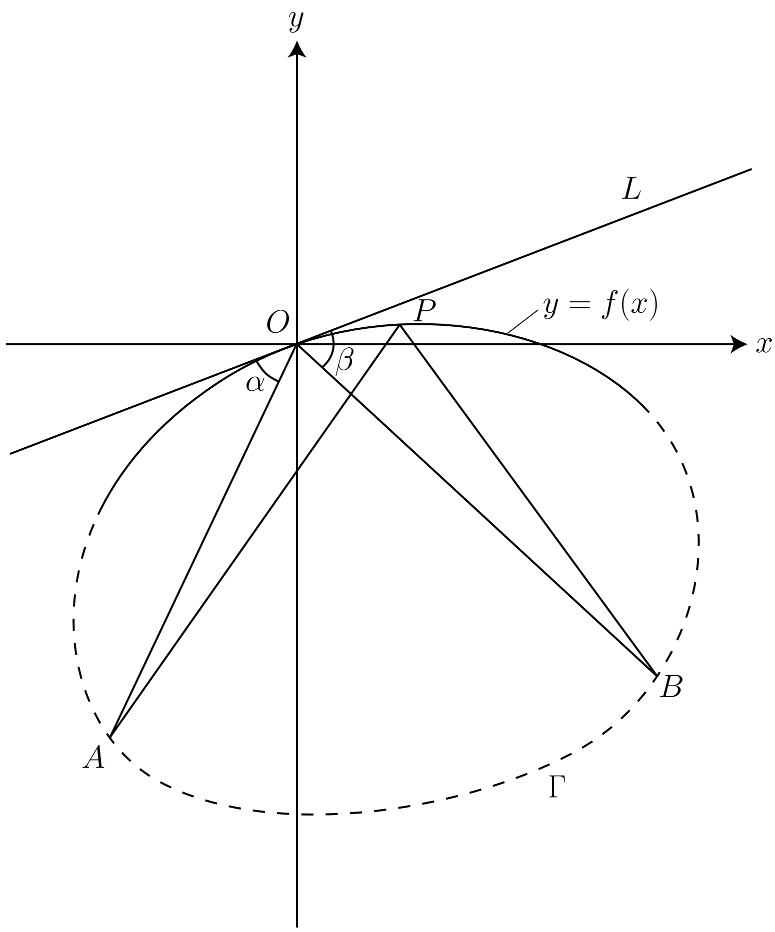
注）最大となるものが存在することは、Γ はコンパクトであること、（Γ はユークリッド空間 R^2 の有界閉集合なので位相空間論の定理からコンパクトである。）よって n 個の Γ の直積空間 $\underbrace{\Gamma\times\Gamma\times\cdots\times\Gamma}_{n}$ もコンパクトであること（これも位相空間論）、そしてコンパクト集合上の連続関数に最大値が存在するという位相空間論の定理から保証される。つまり $\varphi:\Gamma\times\Gamma\times\cdots\times\Gamma\to R$ を $\varphi(A_1,A_2,\cdots,A_n)=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}$ で定義したときに φ が最大となる $(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ を選べばよい。

このとき先ず各 i について A_i と A_{i+1} は異なる 2 点になっていることを示そう。ここで添字は n を法として考えている。つまり $i=n$ のときには $i+1=n+1=1$ と考える。もしも $A_i=A_{i+1}$ であるとしたならば、A_{i+1} を Γ 上の別の点に取り替えることにより $\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ を増加させることが出来ることが三角不等式から分かる。これは $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}$ が最大であるという仮定に反する。よって A_i と A_{i+1} は異なる 2 点であることが分かった。

このとき玉を A_1 に置いて A_2 めがけて打ち出すと、$A_1\to A_2\to A_3\to\cdots\to A_{n-1}\to A_n\to A_1$ と辿る n-閉軌道となることを示そう。これには各 i について点 A_i における入射角と反射角が等しいこと、すなわち、Γ の点 A_i における接線を L_i としたとき直線 $A_{i-1}A_i$ と L_i のなす角度 α_i と L_i と直線 A_iA_{i+1} のなす角度 β_i が等しいことを示せばよい。それには、もしも角度が等しくなかったならば、点 A_i だけを Γ 上で少し動かして $\overline{A_{i-1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}$ を増加させることが出来ることを示せばよい。そうすれば $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}$ が最大であるように $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\Gamma$ を選んでいるという仮定に反することなるからである。簡単のため Γ を平行移動して点 A_i は原点であるとしてよい。また必要があれば座

標軸を取り替えて考えることにより、次の命題を示せばよいことが分かる。

命題　$y=f(x)$ を C^1 級関数とし $f(0)=0$ を満たすとする。原点 $O=(0,0)$ を通り傾きが $f'(0)$ である直線を L とする。L の下方に定点 $A=(a_x,a_y)$ と定点 $B=(b_x,b_y)$ がある。直線 AO には A から O へ進む向きをつけ、直線 BO には B から O へ進む向きをつけておく。点 B は直線 AO の右側にあると仮定する。（B が直線 AO 上にある場合も含むものとする。）直線 L と直線 AO が交わって出来る 4 つの角のうち L の下方にあり AO の左方にあるものを α とし、直線 L と直線 BO が交わって出来る 4 つの角のうち L の下方にあり BO の右方にあるものを β とする。曲線 $y=f(x)$ 上の動点 $P=(x,f(x))$ に対して $g(x)=\overline{AP}+\overline{PB}=\sqrt{(x-a_x)^2+(f(x)-a_y)^2}+\sqrt{(x-b_x)^2+(f(x)-b_y)^2}$ とおく。このとき $\alpha<\beta$ ならば $g'(0)>0$ であり $\alpha>\beta$ ならば $g'(0)<0$ である。



命題の証明　関数 g を x で微分する。

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-a_x)+2(f(x)-a_y)f'(x)}{\sqrt{(x-a_x)^2+(f(x)-a_y)^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-b_x)+2(f(x)-b_y)f'(x)}{\sqrt{(x-b_x)^2+(f(x)-b_y)^2}}$$

よって $f(0)=0$ に注意すると

$$g'(0) = \frac{-a_x-a_yf'(0)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} + \frac{-b_x-b_yf'(0)}{\sqrt{b_x^2+b_y^2}}$$

となる。

$$U = \frac{-a_x-a_yf'(0)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}, \quad V = \frac{b_x+b_yf'(0)}{\sqrt{b_x^2+b_y^2}}$$

とおく。$g'(0)=U-V$ である。$Q=(-1,-f'(0))$ とおき A と Q の内積 $A\cdot Q$ を考える。

$$A\cdot Q = (a_x,a_y)\cdot(-1,-f'(0)) = -a_x-a_yf'(0)$$

である。一方 A と Q のなす角が α であるから

$$A\cdot Q = \sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{1+(f'(0))^2}\cos\alpha$$

である。よって $-a_x-a_yf'(0) = \sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{1+(f'(0))^2}\cos\alpha$、よって $U=\sqrt{1+(f'(0))^2}\cos\alpha$ である。同様に B と $-Q=(1,f'(0))$ の内積を考えることにより、$V=\sqrt{1+(f'(0))^2}\cos\beta$ を得る。よって $\alpha<\beta$ のとき $U-V=\sqrt{1+(f'(0))^2}(\cos\alpha-\cos\beta)>0$、$\alpha>\beta$ のとき $U-V=\sqrt{1+(f'(0))^2}(\cos\alpha-\cos\beta)<0$ を得る。□

これで命題が証明された。よって目標の定理も証明された。□

注）この定理は自然に高次元化することが出来る。

参考文献

"Billiards"、S. Tabachnikov 著、1995、Panoramas et Synthéses、Vol. 1、フランス数学会