幾何 II§1 補足（作成　谷山公規）

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$ を自然数の無限列とする。

$$[a_1] = a_1$$

$$[a_1, a_2] = a_1 + \frac{1}{[a_2]} = a_1 + \frac{1}{a_2}$$

$$[a_1, a_2, a_3] = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3]} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$$

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3, a_4]} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}$$

一般に

$$[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n] = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3, \cdots, a_n]}$$

と定義する。（添字を１つ前にずらして考えることにより $[a_2, a_3, \cdots, a_n]$ は既に定義されていると考える。）

$\alpha_1 = [a_1], \alpha_2 = [a_1, a_2], \cdots, \alpha_n = [a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n], \cdots$ によって無限数列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ を定義する。

本稿では次の定理を証明しよう。

定理 数列 $\{\alpha_n\}$ は収束する。

この定理を示すためには次の二つの命題を示せばよい。

命題１ $\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \cdots < \alpha_6 < \alpha_4 < \alpha_2$.

証明　i が奇数のときには $\alpha_i < \alpha_{i+2} < \alpha_{i+1}$、$i$ が偶数のときには $\alpha_{i+1} < \alpha_{i+2} < \alpha_i$ となることを示せばよい。これらは分母が大きくなれば分数は小さくなり、分母が小さくなれば分数は大きくなることからすぐ分かる。□

命題2

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n-\alpha_{n+1})=0.$$

証明　$|\alpha_n-\alpha_{n+1}|\leq\frac{1}{n}$ であることを示せばよい。これを n に関する帰納法で証明する。$n=1$ のとき、$|\alpha_1-\alpha_2|=|\frac{1}{a_2}|\leq 1$ より成立。

$|\alpha_{n-1}-\alpha_n|\leq\frac{1}{n-1}$ が成立していると仮定して $|\alpha_n-\alpha_{n+1}|\leq\frac{1}{n}$ を示す。$A=[a_2,a_3,\cdots,a_n], B=[a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}]$ とおく。添字を1つ前にずらして考えると仮定が使えて、$|A-B|\leq\frac{1}{n-1}$ である。以下では $A\geq B$ すなわち n が奇数の場合を考える。$A\leq B$ すなわち n が偶数の場合も同様である。

$$|\alpha_n-\alpha_{n+1}|=\alpha_{n+1}-\alpha_n=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}=\frac{A-B}{AB}=\frac{A-B}{(1+A-B+(B-1))(1+(B-1))}$$

ここで $B-1\geq 0$ に注意すると

$$\frac{A-B}{(1+A-B+(B-1))(1+(B-1))}\leq\frac{A-B}{1+A-B}$$

ここで $A-B\leq n-1$ より

$$\frac{A-B}{1+A-B}\leq\frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}=\frac{1}{n}.$$

以上により証明された。□