幾何 I 補足１（作成　谷山公規）

等化位相空間（別名　商位相空間）の考察の際によく使われる次の命題を証明する。

3.13 命題　$(X,\mathcal{D}_X),(Y,\mathcal{D}_Y)$ を位相空間、$f:X\to Y$ を全射連続写像とする。X 上の同値関係 $\sim$ を $x\sim y \Leftrightarrow f(x)=f(y)$ で定義する。$(X/\sim,\mathcal{D}_{X/\sim})$ をこの同値関係に関する $(X,\mathcal{D}_X)$ の等化位相空間とする。$\hat{f}:X/\sim\ \to Y$ を $\hat{f}([x])=f(x)$ で定義する。f が開写像であるかまたは閉写像であるならば、$\hat{f}$ は $(X/\sim,\mathcal{D}_{X/\sim})$ と $(Y,\mathcal{D}_Y)$ の間の同相写像である。

証明

（１）$\hat{f}$ が全射であること。　任意の $y\in Y$ に対して f の全射性より $x\in X$ が存在して $f(x)=y$ を満たす。よって $\hat{f}([x])=y$ となり $\hat{f}$ は全射である。

（２）$\hat{f}$ が単射であること。　$\hat{f}([x_1])=\hat{f}([x_2])$ とすると $f(x_1)=\hat{f}([x_1])=\hat{f}([x_2])=f(x_2)$ より $x_1\sim x_2$ つまり $[x_1]=[x_2]$ となり $\hat{f}$ は単射であることが示された。

（３）$\hat{f}$ が連続であること。　$O\in\mathcal{D}_Y$ としたとき $\hat{f}^{-1}(O)\in\mathcal{D}_{X/\sim}$ を示せばよい。$\varphi:X\to X/\sim$ を $\varphi(x)=[x]$ で定義される自然な射影とする。$f(x)=\hat{f}([x])=\hat{f}(\varphi(x))$ より $f=\hat{f}\circ\varphi$ である。よって $f^{-1}(O)=(\hat{f}\circ\varphi)^{-1}(O)=\varphi^{-1}(\hat{f}^{-1}(O))$ である。f は連続なので $f^{-1}(O)\in\mathcal{D}_X$ である。よって $\varphi^{-1}(\hat{f}^{-1}(O))\in\mathcal{D}_X$ である。よって等化位相の定義より $\hat{f}^{-1}(O)\in\mathcal{D}_{X/\sim}$ である。

（４）$\hat{f}$ の逆写像 $\hat{f}^{-1}$ が連続であること。

（Case A）f が開写像である場合。　$\hat{f}^{-1}$ が連続であることの定義は $\hat{f}^{-1}$ による開集合の逆像が開集合であることであるが、今 $\hat{f}^{-1}$ は全単射なので、これは $\hat{f}$ が開写像であることと同値である。$O\in\mathcal{D}_{X/\sim}$ とする。$\hat{f}(O)\in\mathcal{D}_Y$ を示せばよい。$\hat{f}(O)=f(\varphi^{-1}(O))$ であることはすぐに分かる。等化位相の定義から $\varphi^{-1}(O)\in\mathcal{D}_X$ である。よって f は開写像なので $f(\varphi^{-1}(O))\in\mathcal{D}_Y$ である。

（Case B）f が閉写像である場合。　$\hat{f}^{-1}$ が連続であることの定義は $\hat{f}^{-1}$ による開集合の逆像が開集合であることであるが、これは $\hat{f}^{-1}$ による閉集合の逆像が閉集合であることと同値であり、今 $\hat{f}^{-1}$ は全単射なので、これは $\hat{f}$ が閉写像であることと同値である。F を $X/\sim$ の閉集合とする。$\hat{f}(F)$ が Y の閉集合であることを示せばよい。$\hat{f}(F)=f(\varphi^{-1}(F))$

であり、φ が連続であることから $\varphi^{-1}(F)$ は X の閉集合である。仮定から f は閉写像なので $f(\varphi^{-1}(F))$ も閉集合となる。

以上により $\hat{f}$ が同相写像であることが証明された。$\square$