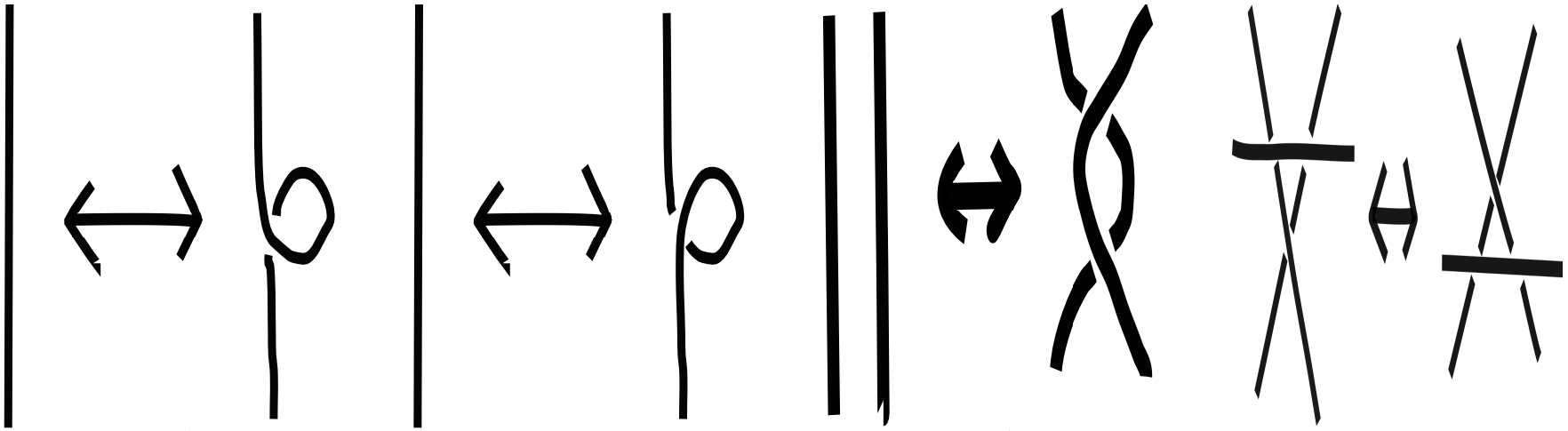
ライデマイスター移動I,IIに関する極小ダイアグラムについて

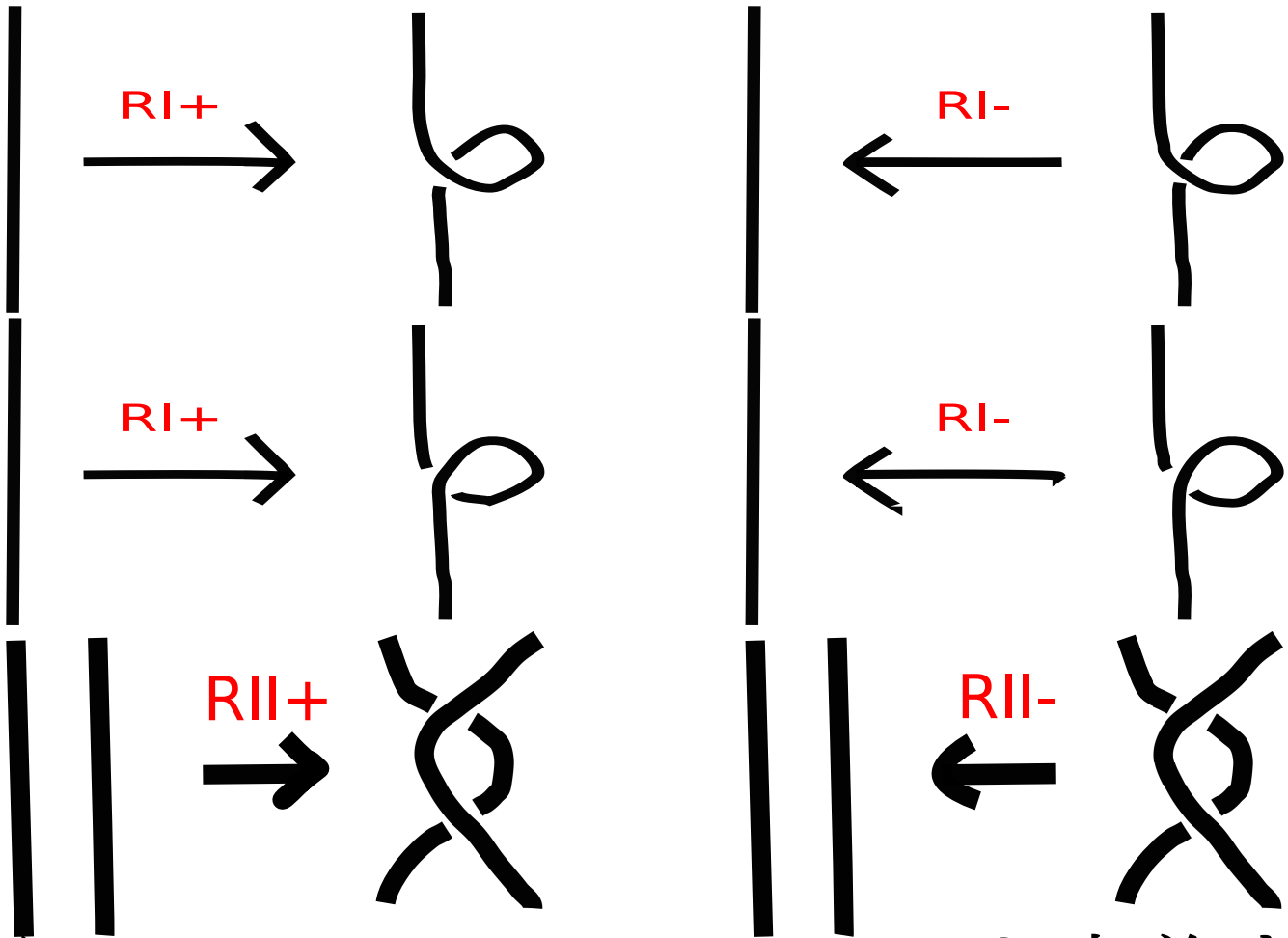
佐々木貴審（九州大学大学院数理学府Ｍ２）

結び目の数学VIII

２０１５年１２月２４日

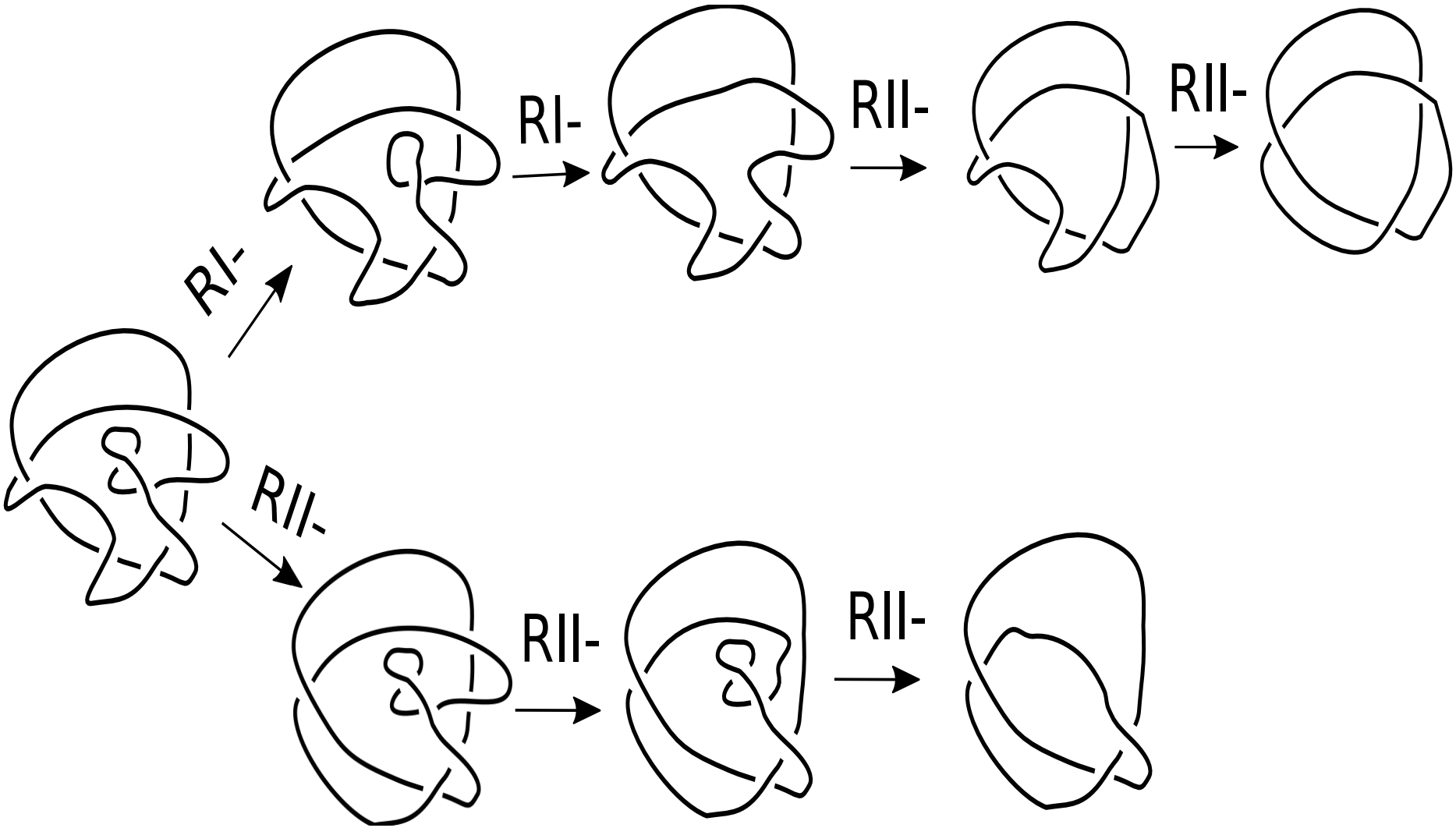


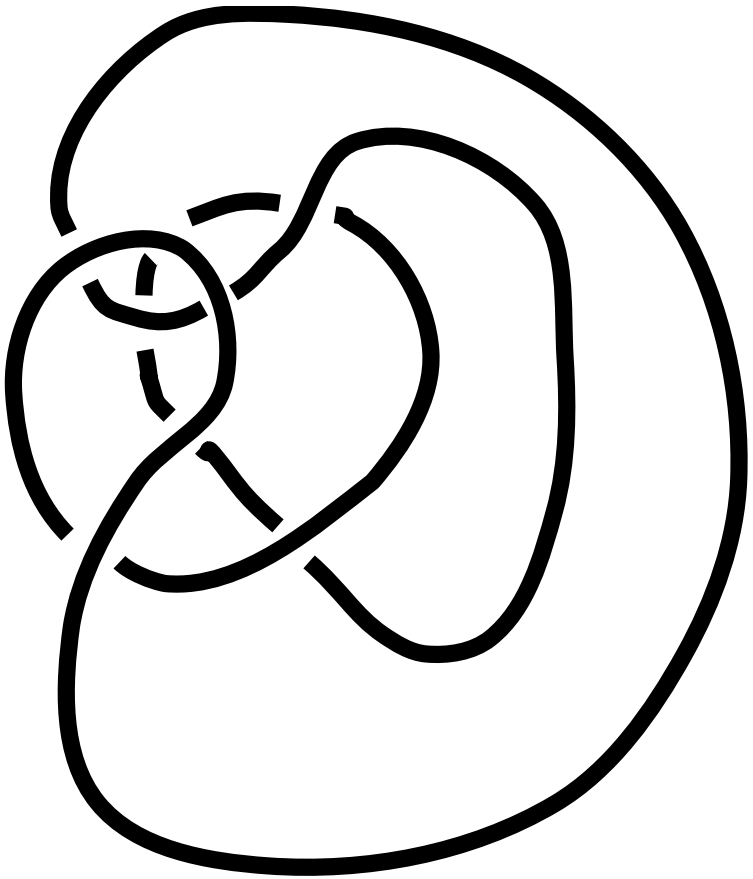
ライデマイスター移動I,IIには、ダイアグラムとして交差数が増える変形と減る変形がある。
ライデマイスター移動IIIは、ダイアグラムとして交差数が変わらない変形である。
ライデマイスター移動Iは１角形、ライデマイスター移動IIは２角形が変形に関係している。



上記のようにRI＋,RI-,RII＋,RII-を定義する。

この絡み目ダイアグラムからRI^{-}, RII^{-}で交差を可能な限り減らすと、（減らし方のよらずに）常に同じダイアグラムになるのかどうか？


RI-
RI-
RII-
RII-
RII-
RII-



定義 1 極小ダイアグラム

$\stackrel{\text{def}}{=}$ RI^-またはRII^-を使って交差を減らせないダイアグラム

定理 1 K:自明な結び目の分離的成分を持たない絡み目

D:Kのダイアグラム

DはRI^{-}, RII^{-}を繰り返して得られる極小ダイアグラムは（手順に依らず）一意的。

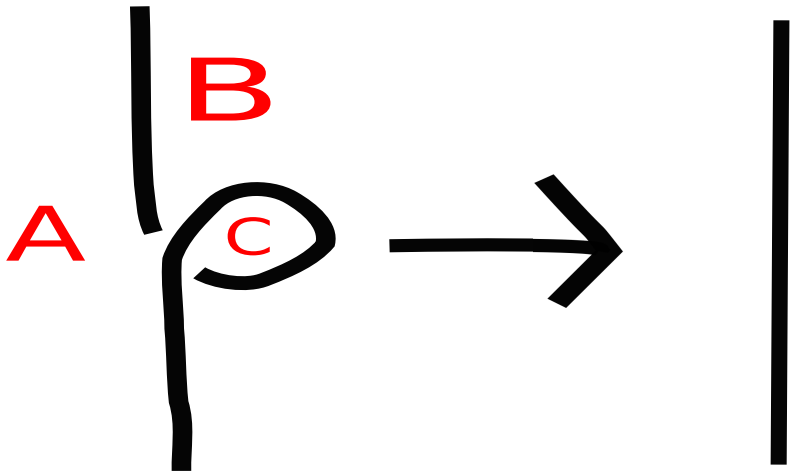
証明）

D_0:DにRI^-, RII^-を繰り返して得られる
極小ダイアグラムの１つ。

D_0は次を明らかに満たす。
($\sharp$)RI^-, RII^-を繰り返して得られる極小ダイアグラムは一意的

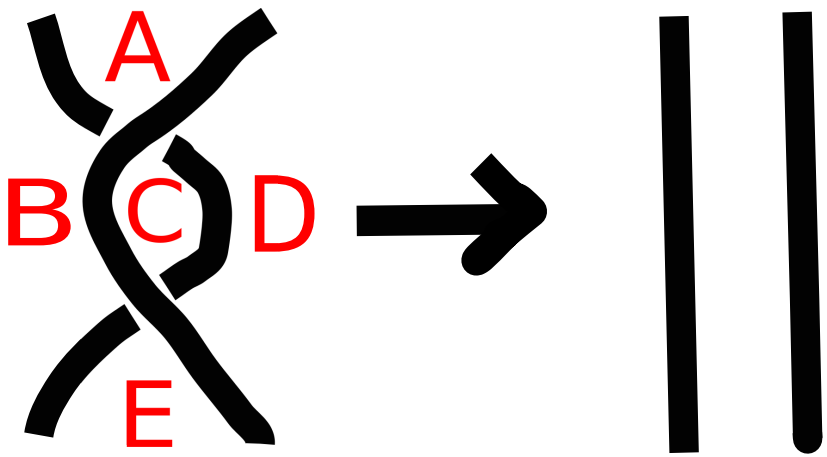
$$D_{n+1} \xrightarrow{RI^- \text{ or } RII^-} D_n$$

D_nは($\sharp$)を満たすと仮定して、
D_{n+1}も($\sharp$)を満たすことを示す。



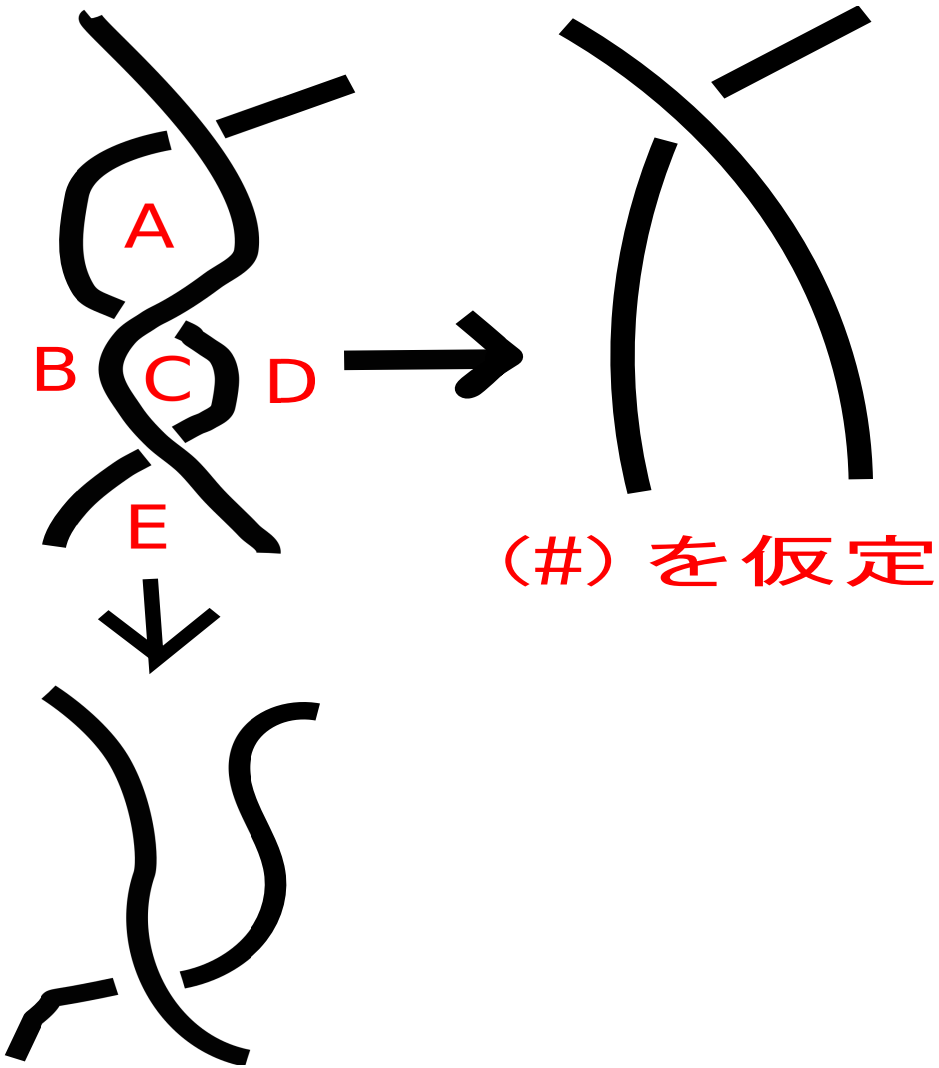
（#）を仮定

左のダイアグラムにおいてRI^{-}, RII^{-}を可能な限り行う。図中の交差を消す時A,B,Cの領域の１つはライデマイスター移動I,IIの１角形、２角形になっている。



(#) を仮定

左のダイアグラムにおいてRI^{-}, RII^{-}を可能な限り行う。図中の交差を消す時,A,B,C,D,Eの領域の１つはライデマイスター移動I,IIの１角形、２角形になっている。

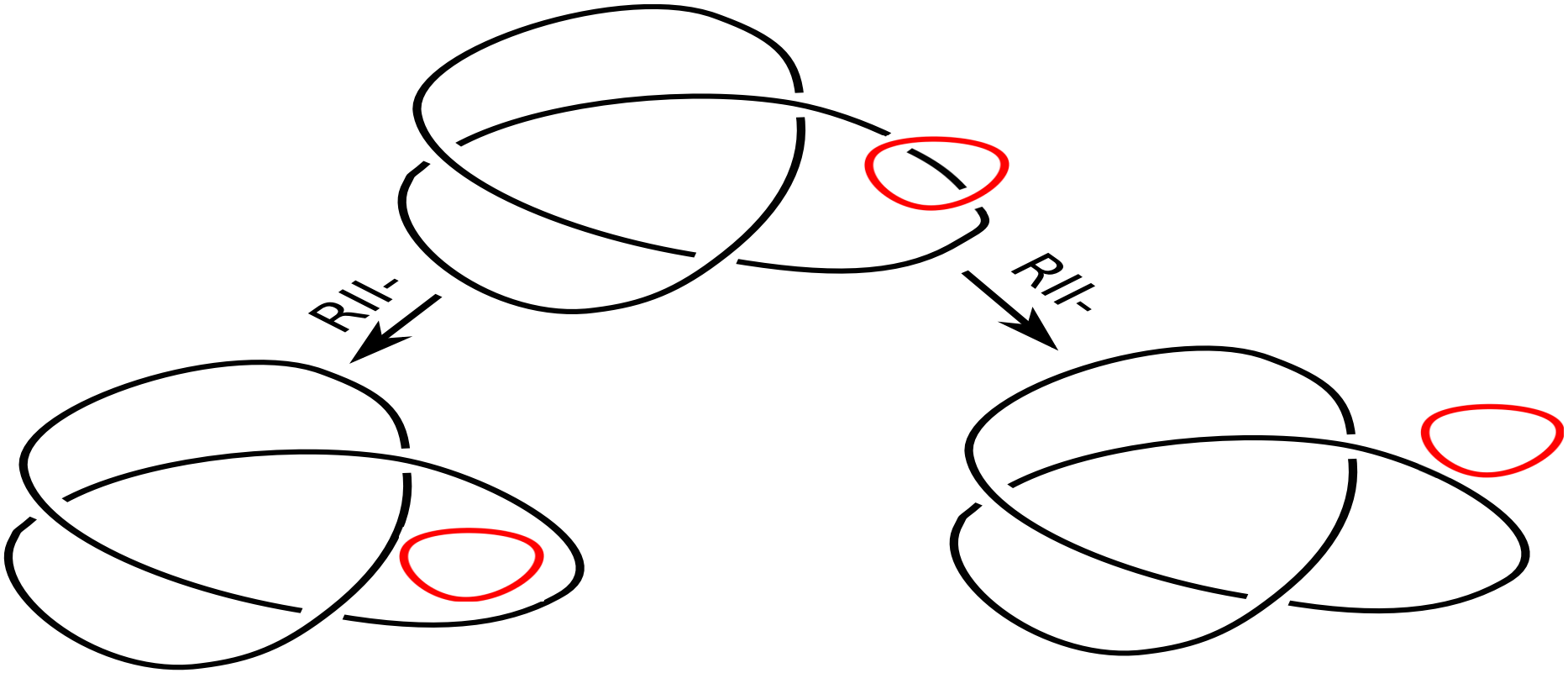


定理１の証明における場合分けの１つ

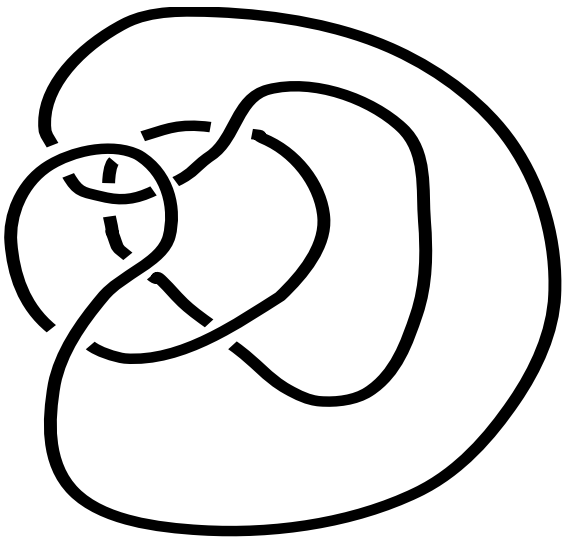
左側のダイアグラムからＡの周りで RII^- をすると右側のダイアグラムと一致する。このとき、左側のダイアグラムは $\sharp$ を満たす。

□

自明な結び目の分離的成分を持つ絡み目の場合



注意 1 各絡み目に極小ダイアグラムは無限にある。（自明な結び目の極小ダイアグラムを連結和することにより、分かる。）



定義 2 D_1, D_2:絡み目ダイアグラム

D_1 と D_2 が *RI-II*同値 $\stackrel{\text{def}}{=}$ D_1 と D_2 はライデマイスター移動*I,II*を有限回使って移りあう。

*RI-II*同値類とは*RI-II*同値の同値類とする。

定理 2 D_1, D_2:絡み目ダイアグラム

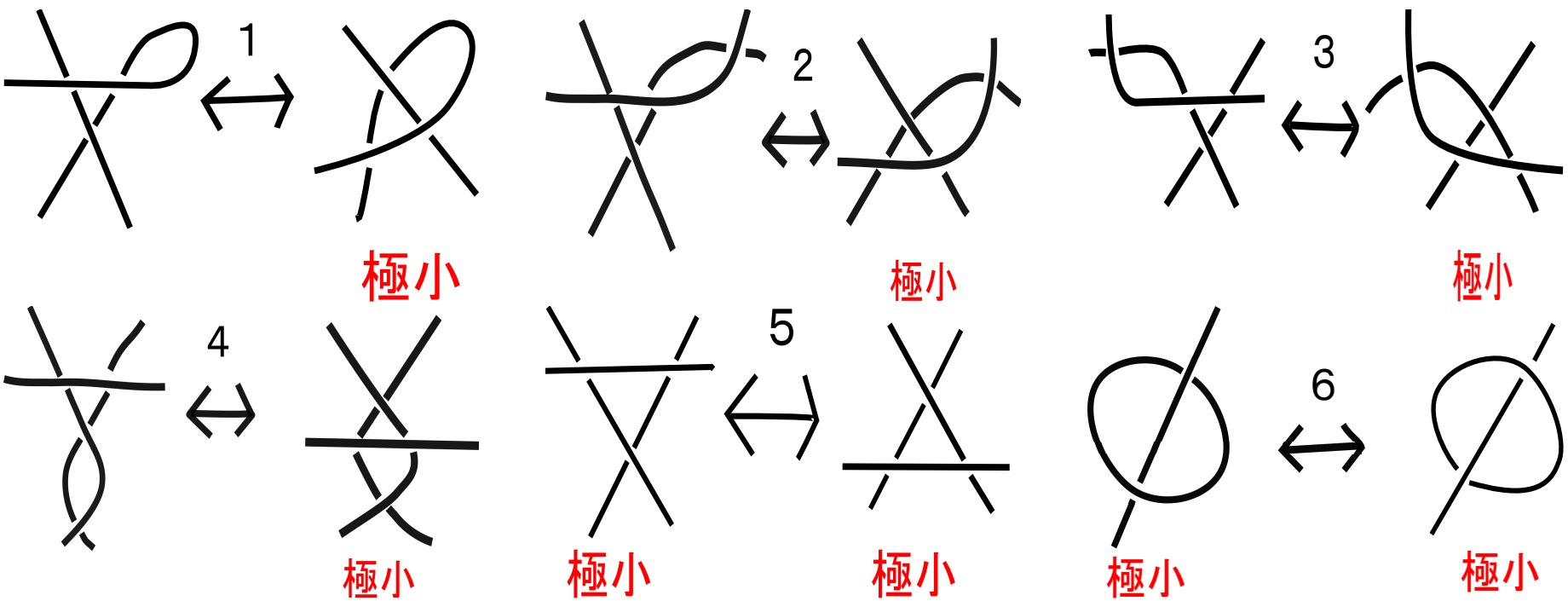
D_1, D_2がライデマイスター移動III 1 回で移る、

かつ、異なるRI-II同値類の元の時、

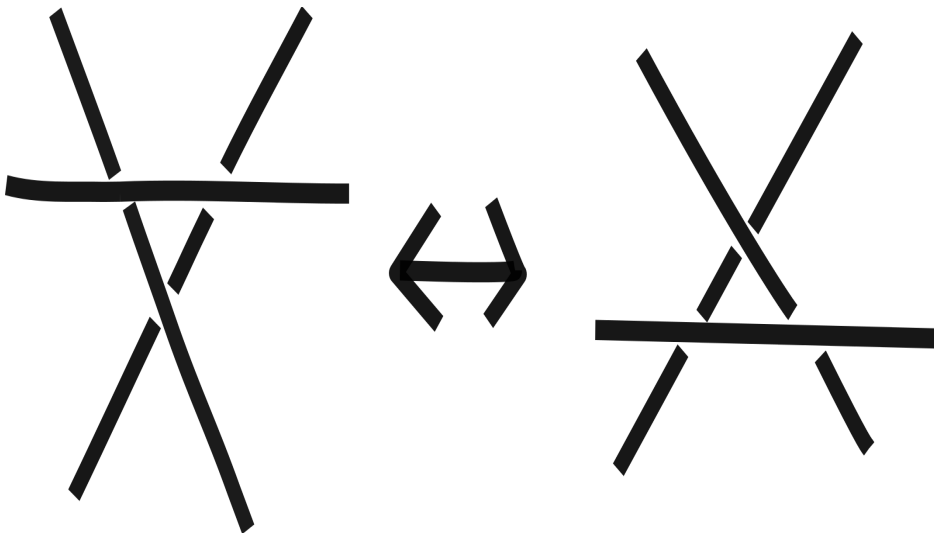
次の$1,2,3,4,5,6$のライデマイスター移動IIIで

移るD_1のRI-II同値類の元,D_2のRI-II同値類の

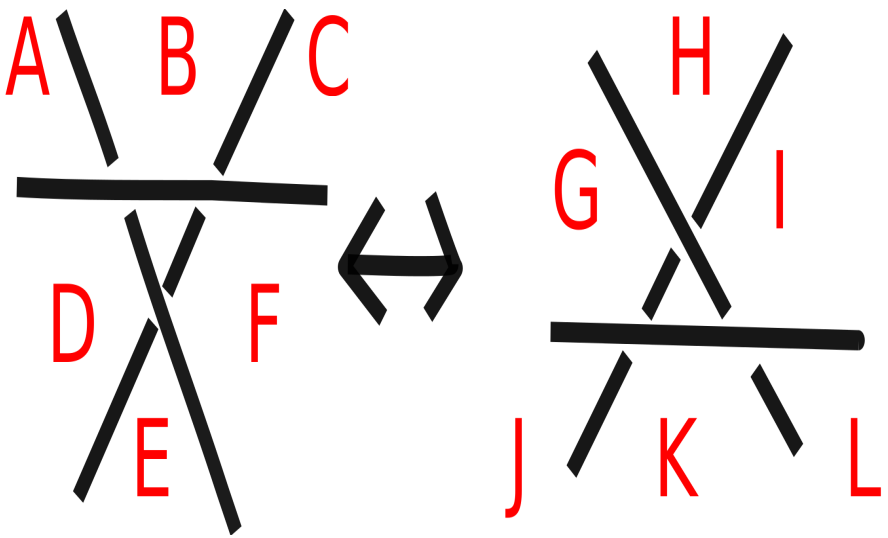
元が存在する。


1
極小
2
極小
3
極小
4
極小
5
極小
極小
6
極小
極小

定理２の証明

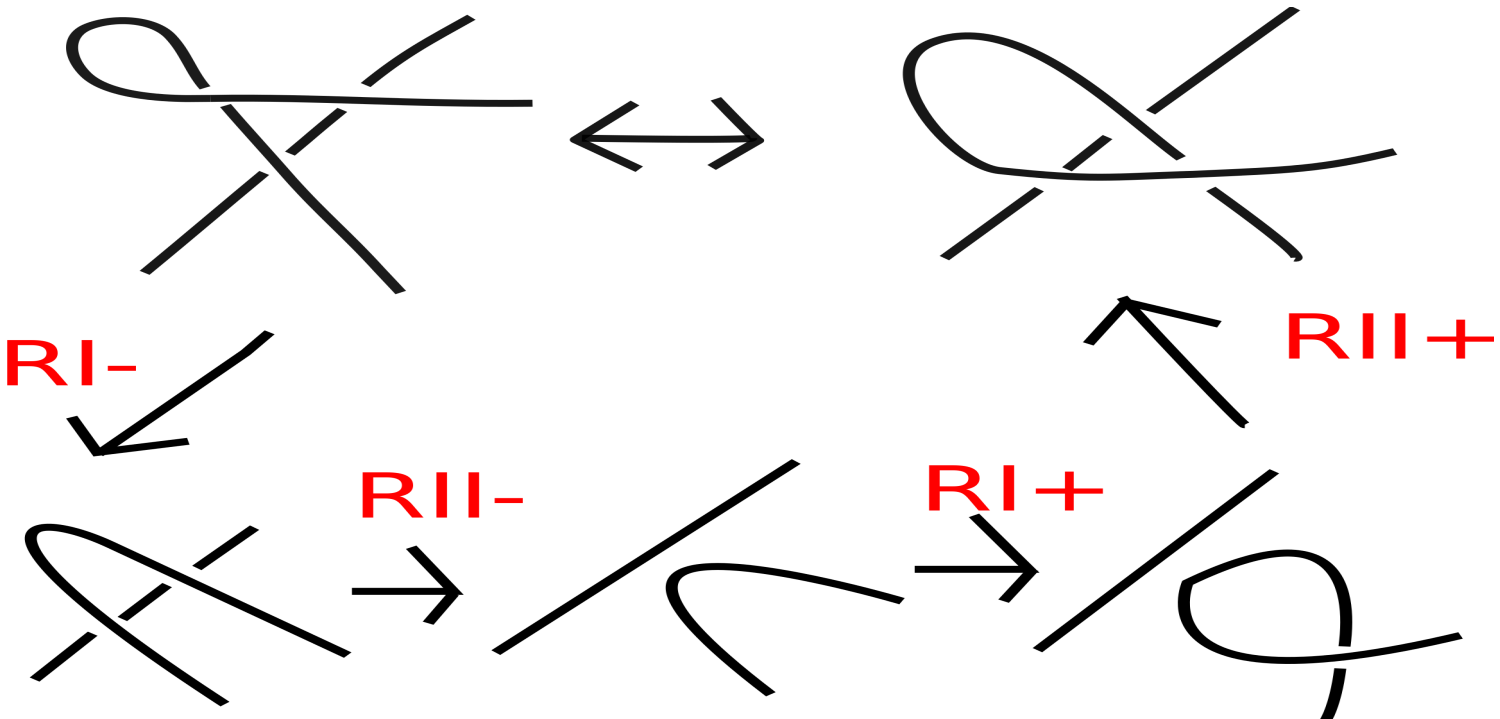


図中の交差を消さない条件で左右のダイアグラムにおいて、同じRI^{-}, RII^{-}をして、可能な限り交差を減らす。



このライデマイスター移動IIIと隣り合う領域のみがRI,RIIの１角形、２角形になっている。

定理２の証明における場合分けの１つ



上の、左右のダイアグラムはライデマイスター移動I,IIで移ることがわかる。 □