結び目群表現のトリプルカップ積の図的計算法

野坂 武史　(**Takefumi Nosaka**)

九州大学　数理学研究院

動機: 双線型形式の仕事 ([14'N.]) を３次にできないか？

$$M \times M \xrightarrow{\text{線形}} A \qquad (M : \text{加群})$$

目標 **3** 次形式の (曲面) 結び目不変量を, 計算可能なもので作りたい.

動機: 双線型形式の仕事 ([14'N.]) を 3 次にできないか?

$$M \times M \times M \xrightarrow{\text{線形}} A \qquad (M : \text{加群})$$

目標 **3** 次形式の (曲面) 結び目不変量を, 計算可能なもので作りたい.

動機: 双線型形式の仕事 ([14'N.]) を３次にできないか？

$$M \times M \times M \xrightarrow{\text{線形}} A \qquad (M : \text{加群})$$

目標 **3** 次形式の (曲面) 結び目不変量を, 計算可能なもので作りたい.

昨年 **2** 次形式 : (相対) カップ積 + **Seifert** 膜のカップリング

$\rightsquigarrow$ 結び目の **Blanchfield** ペアリングの復元 と計算

捩れアレクサンダー加群上の **2** 次形式

(参考事項: 「カップ積ＶＳ交叉型式」の歴史).

参考 ３次形式の議論

- **3** 次元多様体のスピン構造ＶＳ $\mathbb{Z}$ /**2**-カップ積 [**Turaev**]

トリプルカップ積の定義と, 主結果

(準同型 $f : \pi_1(E) \longrightarrow G$ の不変量, ここで $E := S^3 \setminus L$)

設定　M : 右 G-加群 / 可換環 A

$\phi : M^3 \to A$: 3 次線形 s.t. $\phi(a{\cdot}g, b{\cdot}g, c{\cdot}g) = \phi(a, b, c)$.

定義:

トリプルカップ積の定義と, 主結果

(準同型 $f : \pi_1(E) \longrightarrow G$ の不変量, ここで $E := S^3 \setminus L$)

設定　M : 右 G-加群 / 可換環 A

$\phi : M^3 \to A$: 3 次線形 s.t. $\phi(a \cdot g, b \cdot g, c \cdot g) = \phi(a, b, c)$.

定義: $H^1(E, \partial E; M)^3 \xrightarrow{\text{カップ積}} H^3(E, \partial E; M^{\otimes 3}) \longrightarrow$

$$\xrightarrow{\bullet \cap \text{基本類}} M \otimes M \otimes M \xrightarrow{\langle \phi, \ \bullet \rangle} A$$

トリプルカップ積の定義と, 主結果

(準同型 $f:\pi_1(E)\longrightarrow G$ の不変量, ここで $E:=S^3\setminus L$)

設定　M : 右 G-加群 / 可換環 A

$\phi: M^3 \to A$: 3 次線形 s.t. $\phi(a\cdot g, b\cdot g, c\cdot g) = \phi(a,b,c)$.

定義: $$H^1(E,\partial E;M)^3 \xrightarrow{\text{カップ積}} H^3(E,\partial E;M^{\otimes 3}) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\bullet\cap\text{基本類}} M\otimes M\otimes M \xrightarrow{\langle\phi,\ \bullet\rangle} A$$

主結果(N.)　L: non-cable 結び目 or 双曲絡み目とする.

この時, このカップ積は,"図式"のみで計算できる.

鍵 : シャドーカンドルコサイクル不変量 [Carter-Kamada-Saito].

本研究の意義と汎用性

私個人の最近の研究方針

カンドル理論は, 計算を図式 (1 次元落とす) にするのに役立つ.

絡み目以外では？ (本日は詳細略).

本研究の意義と汎用性

私個人の最近の研究方針

カンドル理論は，計算を図式 (１次元落とす) にするのに役立つ．

絡み目以外では？ (本日は詳細略).

- 絡み目表現の不変量を与えた (３次形式として).
- ハンドルボディーリンクの不変量としても適用化.
- 絡み目の (線形表現に関する) “捩れアレクサンダー加群” に３次形式を与えた
- 曲面結び目の表現にも不変量を与えた (３次形式).

本講演の目次

§1　図的な計算法

§2　計算例　(三葉結び目)

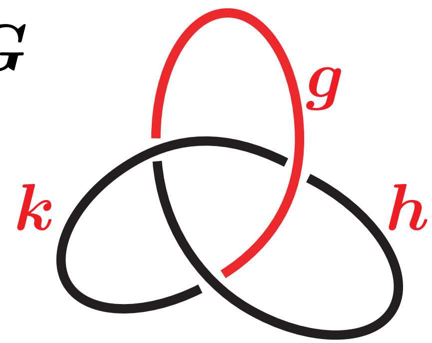
§3　証明方針.

§4　まとめ

今日の記号：　$\pi_L := \pi_1(S^3 \setminus L)$

$E_L := S^3 \setminus L$

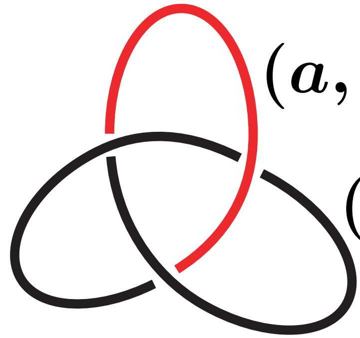
$\underline{\boldsymbol{H^1(E, \partial E; M)}\ \text{の表示}}$ w.r.t. $\pi_1(S^3 \setminus L) \xrightarrow{f} G$



f の Wirtinger 表示： $\{$ over-arcs $\} \xrightarrow{\text{写像}} G$.

$H^1(E, \partial E; M)$ の表示 w.r.t. $\pi_1(S^3 \setminus L) \xrightarrow{f} G$

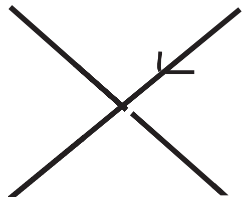
f の Wirtinger 表示： $\{$ over-arcs $\} \xrightarrow{\text{写像}} G$.



定義 [IIJO]. $(M$:右 $\mathbb{Z}[G]$-加群$)$

- f 上の彩色とは $\mathcal{C} : \{$ over-arcs $\} \to M \times G$ over f

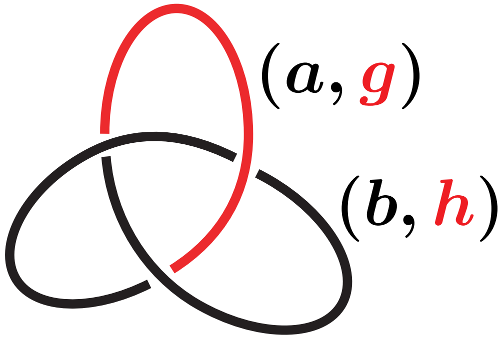
  s.t. (x, g)

  $$(y, h) \in M \times G$$
  $$\Downarrow$$
  $$(y + (x - y) \cdot h,\ h^{-1}gh\ ) \in M \times G$$

-

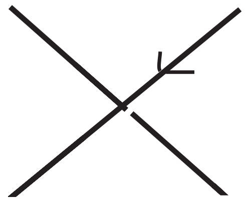
$H^1(E, \partial E; M)$ の表示 w.r.t. $\pi_1(S^3 \setminus L) \xrightarrow{f} G$



f の Wirtinger 表示： $\{$ over-arcs $\} \xrightarrow{\text{写像}} G$.

定義 [IIJO]. $\quad$ (M:右 $\mathbb{Z}[G]$-加群)

- f 上の彩色とは $\mathcal{C} : \{$ over-arcs $\} \to M \times G$ over f

s.t. (x, g)  $(y, h) \qquad \in M \times G$

$$\Downarrow$$

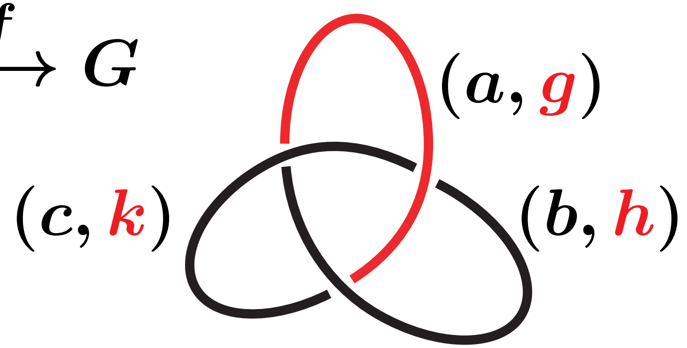
$$(y + (x - y) \cdot h,\ h^{-1}gh\ ) \in M \times G$$

- $\mathcal{C}$ の影とは $\lambda : \{\ D$ の補領域 $\} \to M$ s.t.

(i) $\quad (h, y)$  $a \quad y + (a - y) \cdot h \qquad$ (ii) $\quad \lambda(\{\infty\}) = 0 \in M$.

$\underline{H^1(E, \partial E; M)\text{ の表示}}$ w.r.t. $\pi_1(S^3 \setminus L) \xrightarrow{f} G$

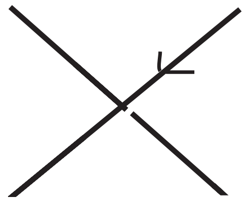
f の Wirtinger 表示： $\{ \text{ over-arcs } \} \xrightarrow{\text{写像}} G$.



定義 [IIJO]. $(M$:右 $\mathbb{Z}[G]$-加群$)$

- f 上の彩色とは $\mathcal{C} : \{ \text{ over-arcs } \} \to M \times G$ over f

  s.t.

  (x, g) $\quad (y, h) \in M \times G$

  $\Downarrow$

  $(y + (x - y) \cdot h,\ h^{-1}gh\ ) \in M \times G$

- $\mathcal{C}$ の影とは $\lambda : \{\ D \text{ の補領域 } \} \to M$ s.t.

  (i) (h, y)  $a \quad y + (a - y) \cdot h$ (ii) $\lambda(\{\infty\}) = 0 \in M$.

定理 [N.14]

${}^\exists$同型： $\mathrm{SCol}(D_f) \cong H^1(E, \partial E; M) \oplus M$.

定義 [N.] $\mathcal{T}_\phi : (\mathrm{SCol}(D_f))^3 \longrightarrow A$ の定義

3 つの影彩色 $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ $\in \mathrm{SCol}(D_f)$ に対し, 次の和を定める.

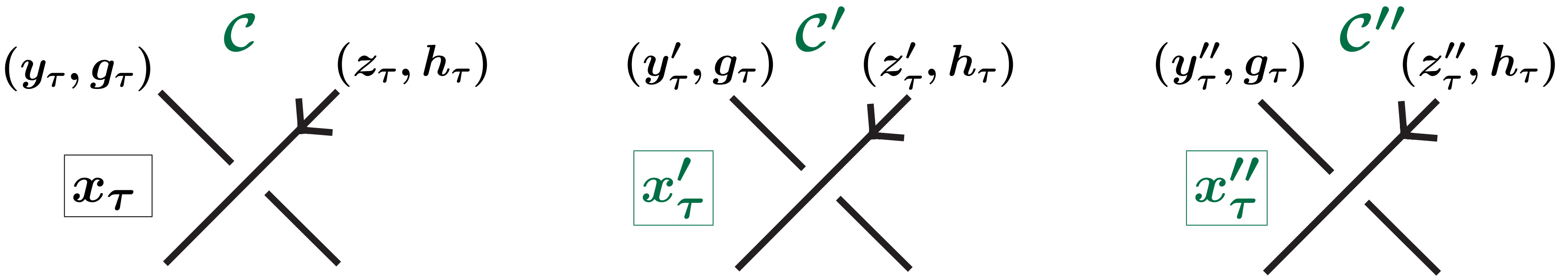
定義 [N.] $\mathcal{T}_\phi : (\mathrm{SCol}(D_f))^3 \longrightarrow A$ の定義

3つの影彩色 $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ $\in \mathrm{SCol}(D_f)$ に対し，次の和を定める．

$\mathcal{T}(\mathcal{C},\ \mathcal{C}',\ \mathcal{C}'') :=$

$$\sum_{\tau:\ \text{交点}} \phi((x_\tau - y_\tau)(1 - g_\tau^{\epsilon_\tau}),\ y'_\tau - z'_\tau,\ z''_\tau\,(1 - h_\tau^{-1})).$$

ここで，τ 付近の彩色は以下の様:



命題 (f の不変量)[N.]

もし $D \overset{R\text{-移動}}{\longleftrightarrow} D'$ の時，

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SCol}(D_f)^3 \arrow[rr, leftrightarrow, "{}^\exists\text{同型}"] \arrow[dr, "\mathcal{T}"'] & \circlearrowleft & \mathrm{SCol}(D'_f)^3 \arrow[dl, "\mathcal{T}'"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

定理 [N.]

$^\exists$同型： $\mathrm{SCol}(D_f) \cong H^1(E, \partial E; M) \oplus M$.

さらに, L が non-cable 結び目 or 双曲絡み目のとき,

$\mathrm{SCol}(D_f)^3 \to A$ はトリプルカップ積に一致する.

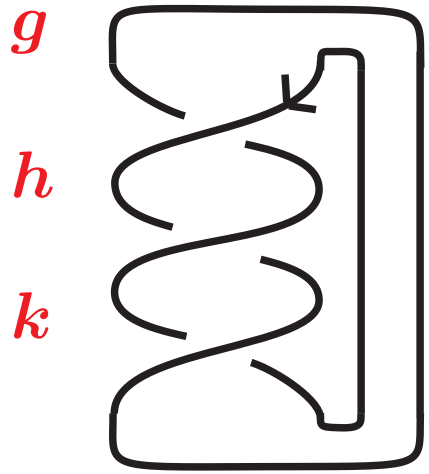
トリプルカップ積の再掲：(準同型 $f : \pi_1(E) \longrightarrow G$, ここで $E := S^3 \setminus L$)

設定 M : 右 G-加群 / 可換環 A

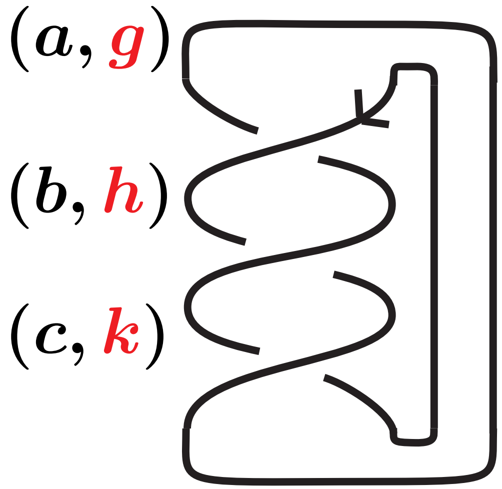
$\phi : M^3 \to A$: 3 次線形 s.t. $\phi(a{\cdot}g, b{\cdot}g, c{\cdot}g) = \phi(a, b, c)$.

定義:
$$H^1(E, \partial E; M)^3 \xrightarrow{\text{カップ積}} H^3(E, \partial E; M^{\otimes 3}) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\bullet \cap \text{基本類}} M \otimes M \otimes M \xrightarrow{\langle \phi,\ \bullet \rangle} A$$

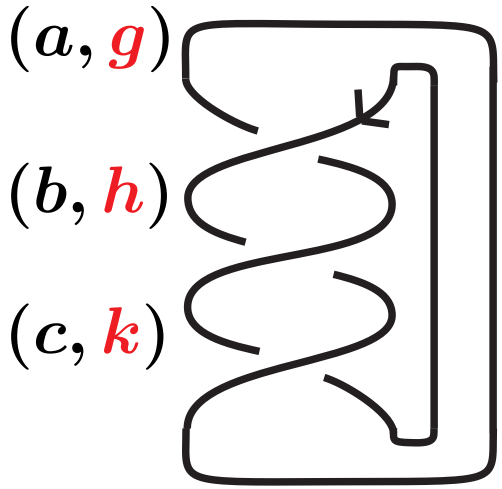
例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,



例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,

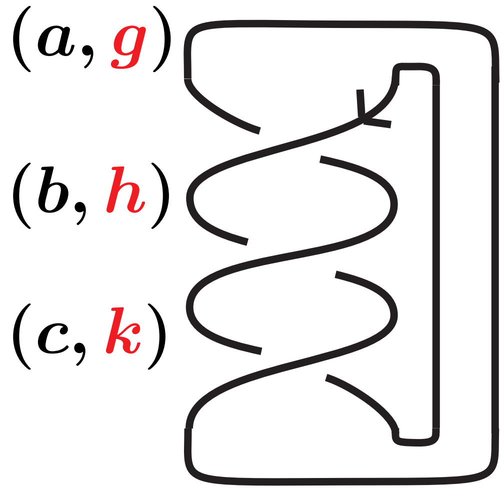


例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,



彩色条件
$$\begin{cases} c = a \cdot h + b \cdot (1 - h) \\ a = b \cdot k + c \cdot (1 - k) \\ b = c \cdot h + a \cdot (1 - g) \end{cases}$$

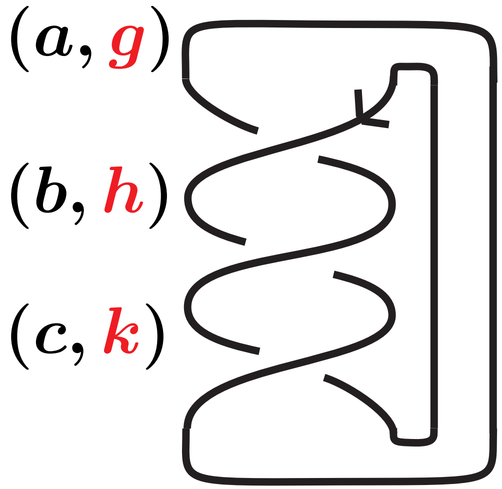
例 (三葉結び目) $\langle \; g, h \mid ghg = hgh \; \rangle$,



彩色条件 $\begin{cases} c = a \cdot h + b \cdot (1 - h) \\ a = b \cdot k + c \cdot (1 - k) \\ b = c \cdot h + a \cdot (1 - g) \end{cases}$

$$\overset{\text{頑張る}}{\iff} \quad (a-b)\cdot(1-g+hg) = (a-b)\cdot(1-h+gh) = 0. \qquad (\clubsuit)$$

例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,



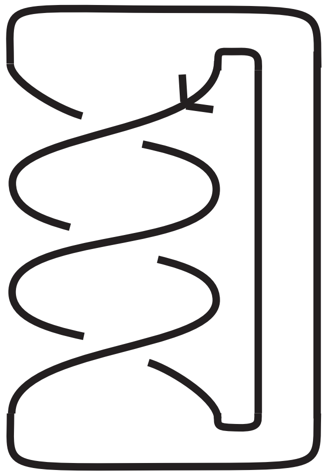
$$\text{彩色条件}\quad \begin{cases} c = a \cdot h + b \cdot (1 - h) \\ a = b \cdot k + c \cdot (1 - k) \\ b = c \cdot h + a \cdot (1 - g) \end{cases}$$

$$\overset{\text{頑張る}}{\iff} \quad (a - b) \cdot (1 - g + hg) = (a - b) \cdot (1 - h + gh) = 0. \qquad (\clubsuit)$$

まとめ (先程の命題の帰結)

$H^1(E, \partial E; M) \oplus M$
$\cong \left\{\ (a, b) \in M^2 \ \middle|\ (\clubsuit) \text{ を満たす.}\ \right\}.$

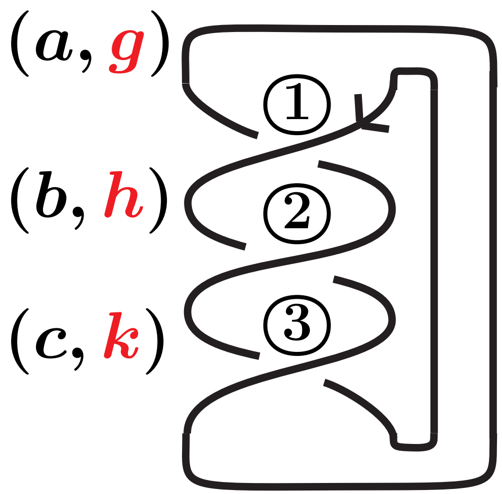
例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,



彩色条件 $\begin{cases} c = a \cdot h + b \cdot (1 - h) \\ a = b \cdot k + c \cdot (1 - k) \\ b = c \cdot h + a \cdot (1 - g) \end{cases}$

$\overset{\text{頑張る}}{\Longleftrightarrow}$ $(a-b)\cdot(1-g+hg) = (a-b)\cdot(1-h+gh) = 0. \quad (\clubsuit)$

例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,



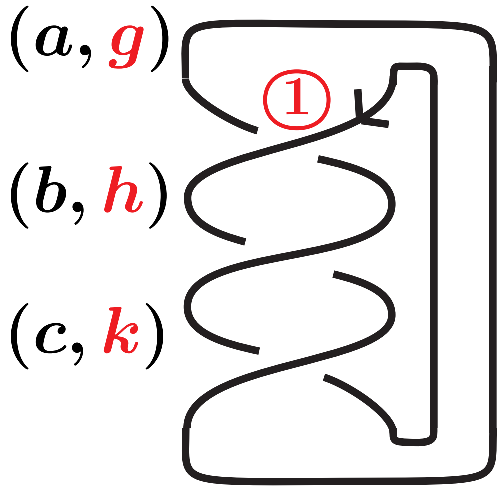
$$\text{彩色条件}\quad \begin{cases} c = a \cdot h + b \cdot (1-h) \\ a = b \cdot k + c \cdot (1-k) \\ b = c \cdot h + a \cdot (1-g) \end{cases}$$

$$\overset{\text{頑張る}}{\Longleftrightarrow} \quad (a-b)\cdot(1-g+hg) = (a-b)\cdot(1-h+gh) = 0. \qquad (\clubsuit)$$

$$\mathcal{T}_\phi\Big((a,b),(a',b'),(a'',b'')\Big) \overset{\text{by def}}{=\!=}$$

$+$

例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,



彩色条件 $\begin{cases} c = a \cdot h + b \cdot (1-h) \\ a = b \cdot k + c \cdot (1-k) \\ b = c \cdot h + a \cdot (1-g) \end{cases}$

$$\overset{\text{頑張る}}{\Longleftrightarrow} \quad (a-b)\cdot(1-g+hg) = (a-b)\cdot(1-h+gh) = 0. \quad (\clubsuit)$$

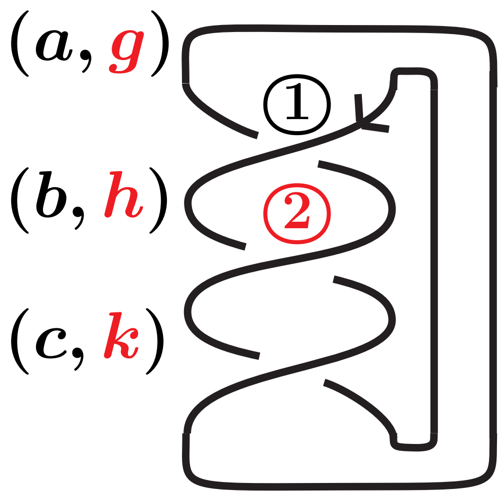
$$\mathcal{T}_\phi\Big((a,b),(a',b'),(a'',b'')\Big) \overset{\text{by def}}{=\!=}$$

$$+\phi\Big(-a\cdot(1-g),\ a'-b',\ b''\cdot(1-h^{-1})\Big) \quad \cdots \text{①}$$

$+$

$+$

例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,



彩色条件 $\begin{cases} c = a \cdot h + b \cdot (1 - h) \\ a = b \cdot k + c \cdot (1 - k) \\ b = c \cdot h + a \cdot (1 - g) \end{cases}$

$$\overset{\text{頑張る}}{\Longleftrightarrow} \quad (a-b)\cdot(1-g+hg) = (a-b)\cdot(1-h+gh) = 0. \qquad (\clubsuit)$$

$$\mathcal{T}_\phi\Big((a,b),(a',b'),(a'',b'')\Big) \overset{\text{by def}}{=\!=}$$

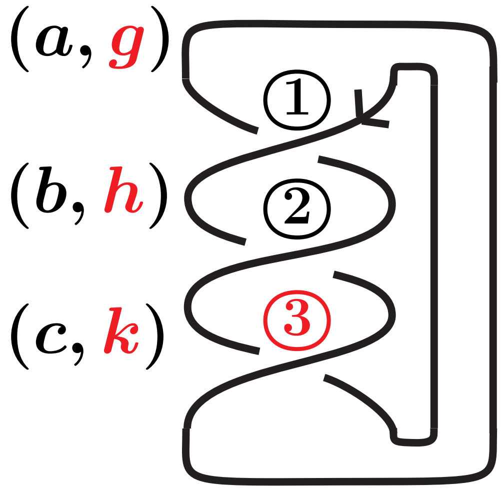
$$+\phi\Big(-a\cdot(1-g),\ a'-b',\ b''\cdot(1-h^{-1})\Big) \quad \cdots \text{①}$$

$$+\ \phi\Big(-b\cdot(1-h),\ b'-c',\ c''\cdot(1-k^{-1})\Big) \quad \cdots \text{②}$$

$+$

$=$

例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,



$$\text{彩色条件}\quad \begin{cases} c = a \cdot h + b \cdot (1 - h) \\ a = b \cdot k + c \cdot (1 - k) \\ b = c \cdot h + a \cdot (1 - g) \end{cases}$$

$$\overset{\text{頑張る}}{\Longleftrightarrow} \quad (a-b)\cdot(1-g+hg) = (a-b)\cdot(1-h+gh) = 0. \qquad (\clubsuit)$$

$$\mathcal{T}_\phi\Big((a,b),(a',b'),(a'',b'')\Big) \overset{\text{by def}}{=\!=}$$

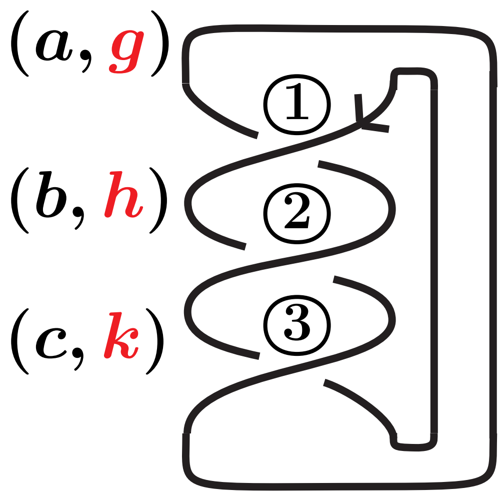
$$+\phi\Big(-a\cdot(1-g),\ a'-b',\ b''\cdot(1-h^{-1})\Big) \quad \cdots ①$$

$$+\ \phi\Big(-b\cdot(1-h),\ b'-c',\ c''\cdot(1-k^{-1})\Big) \quad \cdots ②$$

$$+\ \phi\Big(-c\cdot(1-k),\ c'-a',\ a'\cdot(1-g^{-1})\Big) \quad \cdots ③$$

$$=$$

例 (三葉結び目) $\langle\ g, h \mid ghg = hgh\ \rangle$,



彩色条件 $$\begin{cases} c = a \cdot h + b \cdot (1 - h) \\ a = b \cdot k + c \cdot (1 - k) \\ b = c \cdot h + a \cdot (1 - g) \end{cases}$$

$$\overset{\text{頑張る}}{\Longleftrightarrow} \quad (a-b)\cdot(1-g+hg) = (a-b)\cdot(1-h+gh) = 0. \quad (\clubsuit)$$

$$\mathcal{T}_\phi\Big((a,b),(a',b'),(a'',b'')\Big) \overset{\text{by def}}{=\!=}$$

$$+\phi\Big(-a\cdot(1-g),\ a'-b',\ b''\cdot(1-h^{-1})\Big) \quad \cdots ①$$

$$+\ \phi\Big(-b\cdot(1-h),\ b'-c',\ c''\cdot(1-k^{-1})\Big) \quad \cdots ②$$

$$+\ \phi\Big(-c\cdot(1-k),\ c'-a',\ a'\cdot(1-g^{-1})\Big) \quad \cdots ③$$

$$= \underset{\text{頑張る}}{\cdots\cdots} = \phi\Big((a-b)g^{-1},\ (a'-b')\cdot h,\ (a''-b'')\Big) \in A.$$

Remark & Open problems.

注: 他の結び目の計算も, 同様にできる.

問１. 良い結び目の系統で, 綺麗な計算結果を与えよ.

問２. さらに, **2** 次元結び目 (**twist span** など) に適用せよ.

問３. 双曲でない絡み目の場合, (非) 自明か調べよ.

(注. **Hopf link** では自明).

定理の証明方針 $f:\pi_L \to M\times G =: X$

定理 (再掲)

$^\exists$同型： $\mathrm{SCol}(D_f) \cong H^1(E,\partial E;M)\oplus M$.

さらに, L がnon-cable 結び目 or 双曲絡み目のとき,

$\mathrm{SCol}(D_f)^3 \to A$ はトリプルカップ積に一致する.

トリプルカップ積の再掲：(準同型 $f:\pi_1(E)\longrightarrow G$, ここで $E := S^3\setminus L$)

設定 M：右 G-加群 / 可換環 A

$\phi: M^3\to A$：3 次線形 s.t. $\phi(a{\cdot}g, b{\cdot}g, c{\cdot}g)=\phi(a,b,c)$.

定義: $H^1(E,\partial E;M)^3 \xrightarrow{\text{カップ積}} H^3(E,\partial E;M^{\otimes 3}) \longrightarrow$

$\xrightarrow{\bullet\cap\text{基本類}} M\otimes M\otimes M \xrightarrow{\langle\phi,\ \bullet\rangle} A$

鍵となる可換図式 ([Inoue-Kabaya' 13]).

$\boldsymbol{Q_L} := \pi_L / \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{l} \rangle$ 結び目カンドル, $\quad X = M \times G$.

カンドル複体　　　　　　Simplicial 複体　　　　　　相対群複体

$$C_*^Q(Q_L) \xrightarrow{\varphi_{\mathrm{IK}}} C_*^{\Delta}(Q_L)_{\pi_L} \xleftarrow{\alpha} C_*^{\mathrm{gr}}(E_L, \partial E_L)$$

鍵となる可換図式 ([Inoue-Kabaya' 13]). w.r.t. $f : \pi_L \to M \rtimes G$.

$Q_L := \pi_L/\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{l} \rangle$ 結び目カンドル, $\quad X = M \times G$.

カンドル複体 Simplicial 複体 相対群複体

$$\begin{tikzcd}
C_*^Q(Q_L) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}"] \arrow[d, "f_*"'] & C_*^\Delta(Q_L)_{\pi_L} \arrow[d, "f_*"'] & C_*^{\mathrm{gr}}(E_L, \partial E_L) \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f_*"'] \\
C_*^Q(X) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}"] & C_*^\Delta(X)_G & C_*^{\mathrm{gr}}(G \rtimes M)_G \arrow[l, "\alpha"] \arrow[d, "{\langle \phi, \bullet \rangle}"] \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

鍵となる可換図式 ([Inoue-Kabaya' 13]). w.r.t. $f : \pi_L \to M \rtimes G$.

$Q_L := \pi_L / \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{l} \rangle$ 結び目カンドル, $\quad X = M \times G$.

カンドル複体　　Simplicial 複体　　相対群複体

$$
\begin{tikzcd}
C_*^{Q}(Q_L) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}"] \arrow[d, "f_*"'] & C_*^{\Delta}(Q_L)_{\pi_L} \arrow[d, "f_*"'] & C_*^{\mathrm{gr}}(E_L, \partial E_L) \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f_*"'] \\
C_*^{Q}(X) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}"] & C_*^{\Delta}(X)_G & C_*^{\mathrm{gr}}(G \rtimes M)_G \arrow[l, "\alpha"] \arrow[d, "{\langle \phi, \bullet \rangle}"] \\
 & & A
\end{tikzcd}
$$

図的に計算可能

鍵となる可換図式 ([Inoue-Kabaya' 13]). w.r.t. $f : \pi_L \to M \rtimes G$.

$Q_L := \pi_L/\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{l} \rangle$ 結び目カンドル, $X = M \times G$.

カンドル複体　　　　Simplicial 複体　　　　相対群複体

$$
\begin{tikzcd}
C_*^Q(Q_L) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}"] \arrow[d, "f_*"'] & C_*^\Delta(Q_L)_{\pi_L} \arrow[d, "f_*"'] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & C_*^{\mathrm{gr}}(E_L, \partial E_L) \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f_*"'] \\
C_*^Q(X) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}"] & C_*^\Delta(X)_G & C_*^{\mathrm{gr}}(G \rtimes M)_G \arrow[l, "\alpha"] \arrow[d, "\langle \phi, \bullet \rangle"] \\
 & & A
\end{tikzcd}
$$

図的に計算可能

Key Thm. [N. 東北結び目セミナー'15]

L が non-cable 結び目 or 双曲絡み目とする. この時,

(I)　上図で $^\exists$ 鎖写像 β はホモロジー同型を誘導する.

(II)　左上の鎖写像 φ_{IK} はホモロジー同型を誘導する.

鍵となる可換図式 ([Inoue-Kabaya' 13]). w.r.t. $f : \pi_L \to M \rtimes G$.

$Q_L := \pi_L / \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{l} \rangle$ 結び目カンドル, $X = M \times G$.

カンドル複体　　Simplicial 複体　　相対群複体

$$\begin{tikzcd}
C_*^{Q}(Q_L) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}"] \arrow[d, "f_*"'] & C_*^{\Delta}(Q_L)_{\pi_L} \arrow[d, "f_*"'] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & C_*^{\mathrm{gr}}(E_L, \partial E_L) \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f_*"'] \\
C_*^{Q}(X) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}"] & C_*^{\Delta}(X)_G & C_*^{\mathrm{gr}}(G \rtimes M)_G \arrow[l, "\alpha"] \arrow[d, "\langle \phi, \bullet \rangle"] \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

図的に計算可能

Key Thm. [N. 東北結び目セミナー'15]

L が non-cable 結び目 or 双曲絡み目とする．この時,

(I) 上図で $^\exists$ 鎖写像 β はホモロジー同型を誘導する.

(II) 左上の鎖写像 φ_{IK} はホモロジー同型を誘導する.

鍵となる可換図式 ([Inoue-Kabaya' 13]). w.r.t. $f : \pi_L \to M \rtimes G$.

$Q_L := \pi_L / \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{l} \rangle$ 結び目カンドル, $\quad X = M \times G$.

カンドル複体 Simplicial 複体 相対群複体

$$\begin{tikzcd}
H_3^Q(Q_L) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}", "\cong"'] \arrow[d, "f_*"] & H_3^{\Delta}(Q_L)_{\pi_L} \arrow[d, "f_*"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & H_3^{\mathrm{gr}}(E_L, \partial E_L) \arrow[l, "\alpha"', "\cong"] \arrow[d, "f_*"] \\
H_3^Q(X) \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{IK}}"] & H_3^{\Delta}(X)_G & H_3^{\mathrm{gr}}(G \rtimes M)_G \arrow[l, "\alpha"] \arrow[d, "\langle \phi, \bullet \rangle"] \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

図的に計算可能

Key Thm. [N. 東北結び目セミナー'15]

L が non-cable 結び目 or 双曲絡み目とする．この時,

(I) 上図で $^{\exists}$ 鎖写像 β はホモロジー同型を誘導する．

(II) 左上の鎖写像 φ_{IK} はホモロジー同型を誘導する．

先程の β が存在するか？ ... 場合わけによる：

(1) 自明な結び目

(2) 双曲絡み目

(3) サテライトだが, ケーブルではない.

(4) トーラス結び目

Key LEMMA. (ホモロジー代数)

次を満たすとき, 前頁の β が存在する.

$${}^{\forall}g \in \pi_L \setminus \pi_1(\partial E_L), \qquad g^{-1}\pi_1(\partial E_L)g \cap \pi_1(\partial E_L) = \{1\}$$

注意：上の **(2)**, **(3)** はこれをみたす. (cf. 代数的アトロイダル)

まとめ

主結果(N.)　　L: 結び目 or 双曲絡み目とする.

この時, このカップ積は,“図式”のみで計算できる.

- 3 次形式の (曲面) 絡み目の表現の不変量を与えた.

- ３葉結び目でも計算可能であり, 初等的.

$\Rightarrow$ 院生でも計算できそうである.

HOPE: 2 次や 3 次形式の不変量の研究が進展すれば・・

Thank you