

4 交点以下の welded arc の数え上げ

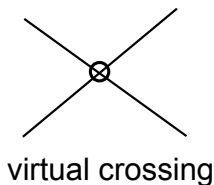
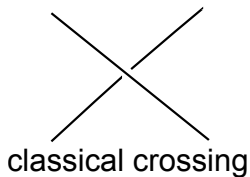
小松 聖弥

大阪市立大学

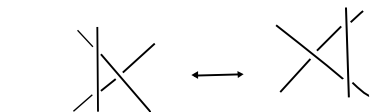
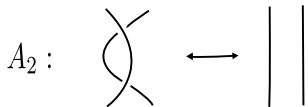
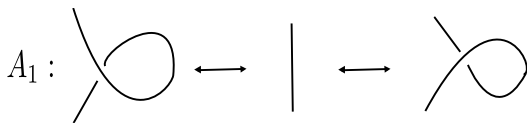
2015.12.25.

Definition (Virtual arc diagrams)

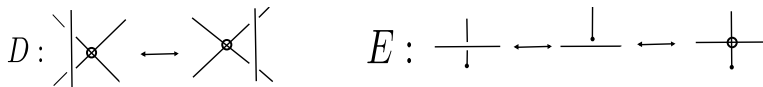
A virtual arc diagram A is an immersed and oriented interval in \mathbb{R}^2 and each crossing of A is assigned by the following information.



The classical moves (A_1-A_3)



The virtual moves (B_1-C) and the welded moves(D,E)



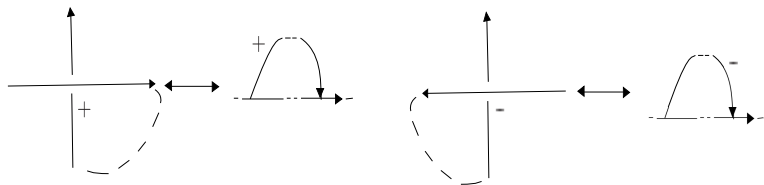
A, A' : virtual arc diagrams

A と A' が w-equivalent であるとは、 A_1-E を有限回施して A が A' に移りあうことをいう。(welded arc)

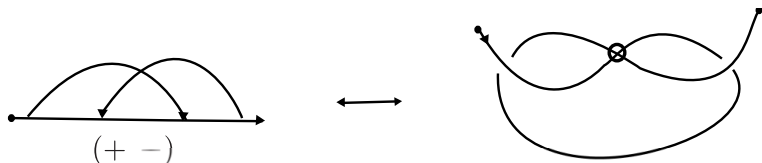
Gauss diagram

向き付けられた線分に矢印と符号を加えた図を Gauss diagram という。

Gauss diagram の矢印と符号に対して、図のように classical crossing を対応させることで、oriented virtual arc A を一意に得ることができる。

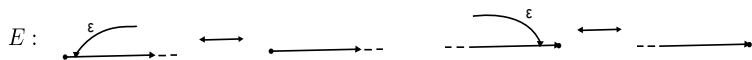
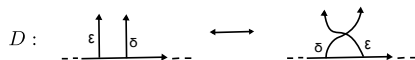
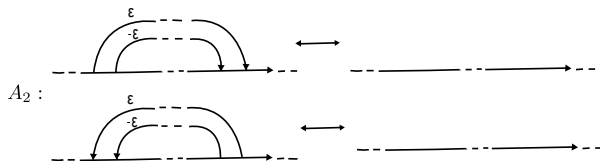
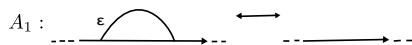


Example 1



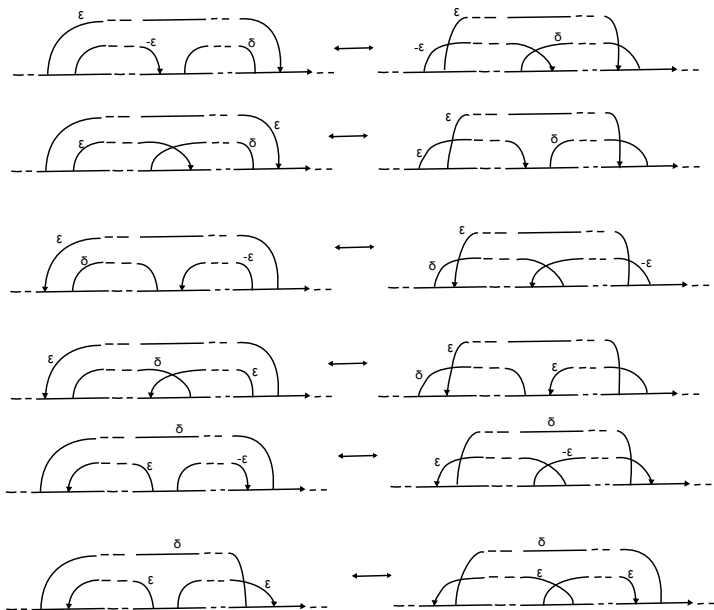
Gauss diagram による Reidemeister 表示 1

$$\epsilon, \delta \in \{-1, 1\}$$



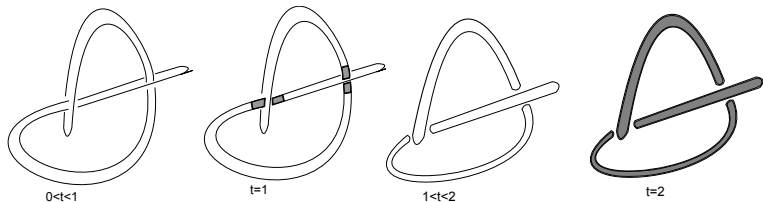
Gauss diagram による Reidemeister 表示 2

$A_3 :$



Ribbon 2-knot

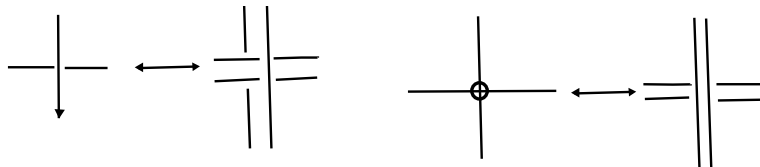
Ribbon 2-knot S は、 m 個の 2 次元球面からなる自明な 2 次元絡み目に $m - 1$ 個の 1-handle を接着して得られる 2 次元球面の \mathbb{R}^4 への埋め込みの像である。



Tube(A)

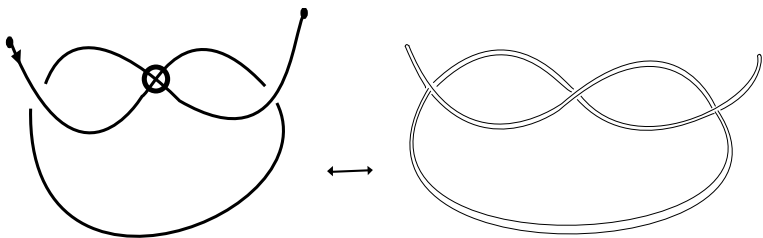
A : an oriented virtual arc diagram

A の各交点を以下の図のように対応させる。



この対応によって得られる ribbon disk が与える ribbon 2-knot を $\text{Tube}(A)$ で表す。

Example2



Theorem(Satoh,1999)

(1) Any ribbon 2-knot S is associated with some virtual arc diagram A ; $S \cong \text{Tube}(A)$.

(2) If A and A' are w-equivalent, then $\text{Tube}(A) \cong \text{Tube}(A')$.

Main result

以下の手順で welded arc を分類していく。

Step 1 明らかな同型で分類する。 (A_1-E で移りあう)

Step 2 Wirtinger's algorithm を使い、welded arc の群を求める。この群は $\pi_1(\mathbb{R}^4\text{-Tube}(A))$ と同型で、これにより $\text{Tube}(A)$ の Alexander polynomial $\Delta(t)$ を計算する。

Step 3 $\text{Tube}(A)$ で同型かどうか調べる。

4 交点以下の ribbon 2-knot については、以下の研究結果が存在する。

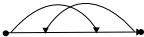


Yasuda T. Crossing and base numbers of ribbon 2-knot.





J.KnotTheoryRamifications 10 (2001).

安田智之. 最小交点数 4 の二次元リボン結び目 I-IV. 奈良工業高等専門学校研究紀要 44-47 号 (2009-2012).

Theorem

$\text{Tube}(A)$ が同型である 4 交点以下の welded arc A は高々 101 個しかない。

Gauss diagram	sign	$G(W)$	$\Delta(t)$
	$(+, +)$	$G(x^{-1}y^{-1})$	$1 - t - t^2$
	$(+, -)$	$G(x^{-1}y)$	$1 - 2t$
	$(-, +)$	$G(xy^{-1})$	$2 - t$
	$(+, +, +)$	$G(x^2y)$	$-1 + t^2 - t^3$
	$(-, -, -)$	$G(xy^2)$	$-1 + t - t^3$
	$(+, -, -)$	$G(x^{-2}y)$	$1 - t - t^2$
	$(-, +, +)$	$G(x^2y^{-1})$	$-1 - t + t^2$
	$(+, +, +)$	$G(xy x^{-1}y)$	$-1 + 2t - 2t^2$
	$(+, +, -)$	$G(xy x^{-1}y^{-1})$	$-2 + 2t - t^2$
	$(+, -, +)$	$G(x^{-1}yxy)$	$1 - 2t + t^2 - t^3$
	$(-, +, -)$	$G(xy^{-1}x^{-1}y^{-1})$	$-1 + t - 2t^2 + t^3$
	$(+, -, -)$	$G(x^{-1}yxy^{-1})$	$1 - 3t + t^2$

	$(+, +, +, +)$	$G(x^{-3}y^{-1})$	$1 - t + t^4$
	$(-, -, -, -)$	$G(x^3y)$	$1 - t^3 + t^4$
	$(+, +, +, -)$	$G(x^{-3}y)$	$1 - t - t^3$
	$(-, -, -, +)$	$G(x^3y^{-1})$	$1 + t^2 - t^3$
	$(+, +, +, +)$	$G(xyxy)$	$1 - t + t^2 - t^3 + t^4$
	$(+, +, -, -)$	$G(x^{-1}yx^{-1}y)$	$2 - 3t$
	$(-, -, +, +)$	$G(xy^{-1}xy^{-1})$	$-3 + 2t$
	$(+, +, +, +)$	$G(x^{-2}y^{-2})$	$1 - t^2 + t^4$
	$(+, +, -, -)$	$G(x^{-2}y^2)$	$-1 + 2t^2$
	$(-, -, +, +)$	$G(x^2y^{-2})$	$2 - t^2$
	$(+, +, +, +)$	$G(x^{-2}y^{-1}xy^{-1})$	$2 - 2t + t^3$
	$(-, -, -, -)$	$G(x^2yx^{-1}y)$	$1 - 2t^2 + 2t^3$
	$(+, +, +, -)$	$G(x^{-2}yxy^{-1})$	$1 - 2t$
	$(-, -, -, +)$	$G(x^2y^{-1}x^{-1}y)$	$-2 + t$
	$(+, +, -, +)$	$G(x^{-2}y^{-1}xy)$	$1 - 2t + t^2 + t^3$
	$(-, -, +, -)$	$G(x^2yx^{-1}y^{-1})$	$1 + t - 2t^2 + t^3$
	$(+, +, -, -)$	$G(x^{-2}yxy)$	$1 - t - t^3$
	$(-, -, +, +)$	$G(x^2y^{-1}x^{-1}y^{-1})$	$-1 - t^2 + t^3$

	$(+, +, +, -)$	$G(x^{-1}y^{-1}xy^{-2})$	$-1 - t + t^2 - t^3$
	$(+, +, -, +)$	$G(x^{-1}y^{-1}xy^2)$	$-1 + 2t - t^2 - t^3$
	$(+, +, -, -)$	$G(x^{-1}yxy^2)$	$-2 + t$
	$(-, -, +, +)$	$G(xy^{-1}x^{-1}y^2)$	$1 - 2t$
	$(+, -, -, +)$	$G(x^{-1}yxy^2)$	$1 - 2t + t^2 - t^4$
	$(-, +, +, -)$	$G(xy^{-1}x^{-1}y^{-2})$	$-1 + t^2 - 2t^3 + t^4$
	$(+, +, +, +)$	$G(x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y^{-1})$	$1 - t + 2t^2 - 2t^3 + t^4$
	$(-, -, -, -)$	$G(xy x^{-1} y x y)$	$1 - 2t + 2t^2 - t^3 + t^4$
	$(+, +, +, -)$	$G(x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y)$	$1 - 3t + 2t^2 - t^3$
	$(+, +, -, +)$	$G(x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1})$	$1 - 2t + 3t^2 - t^3$
	$(+, +, -, -)$	$G(x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y)$	$2 - 4t + t^2$
	$(-, -, +, +)$	$G(xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1})$	$1 - 4t + 2t^2$
	$(+, -, +, +)$	$G(x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1})$	$2 - 3t + 2t^3$
	$(+, -, +, -)$	$G(x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y)$	$1 - 3t + 3t^2$
	$(-, +, -, +)$	$G(xy x^{-1} y^{-1} x y^{-1})$	$3 - 3t + t^2$
	$(+, -, -, -)$	$G(x^{-1}yxyx^{-1}y)$	$1 - 2t + 2t^2 - 2t^3$
	$(-, +, +, +)$	$G(xy^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1})$	$-2 + 2t - 2t^2 + t^3$

	(+, +, +, +)	$G(x^{-1}y^{-2}xy^{-1})$	$2 - t - t^2 + t^3$
	(-, -, -, -)	$G(xy^2x^{-1}y)$	$1 - t - t^2 + 2t^3$
	(+, +, -, -)	$G(x^{-1}y^2xy^{-1})$	$-1 + t + 2t^2 - t^3$
	(-, -, +, +)	$G(xy^{-2}x^{-1}y)$	$-1 + 2t + t^2 - t^3$
	(+, -, +, +)	$G(x^{-1}y^{-2}xy)$	$1 - t + t^3$
	(-, +, -, -)	$G(xy^2x^{-1}y^{-1})$	$1 - t^2 + t^3$
	(+, -, -, -)	$G(x^{-1}y^2xy)$	$-1 + t + t^2 - t^3 + t^4$
	(-, +, +, +)	$G(xy^{-2}x^{-1}y^{-1})$	$1 - t + t^2 + t^3 - t^4$
	(+, +, +, +)	$G(x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y^{-1})$	$1 - 2t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$
	(+, +, -, -)	$G(x^{-1}y^{-1}xyxyx^{-1}y^{-1})$	$1 - 2t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$
	(+, +, +, -)	$G(x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyx^{-1}y^{-1})$	$-1 + 3t - 3t^2 + 2t^3$
	(+, +, -, +)	$G(x^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1})$	$2 - 3t + 3t^2 - t^3$
	(+, -, +, +)	$G(x^{-1}yx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y)$	$-1 + 3t - 3t^2 + 2t^3$
	(-, +, +, +)	$G(xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1}xy^{-1})$	$2 - 3t + 3t^2 - t^3$
	(+, -, +, -)	$G(x^{-1}yx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y)$	$1 - 4t + 4t^2$
	(-, +, -, +)	$G(xy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy^{-1})$	$4 - 4t + t^2$
	(+, -, -, +)	$G(x^{-1}yxy^{-1}xy^{-1}x^{-1}y)$	$-2 + 5t - 2t^2$
	(-, +, +, -)	$G(xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}yx^{-1}y)$	$-2 + 5t - 2t^2$
	(+, -, -, +)	$G(xy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y)$	$1 - 2t - t^2 + 2t^3 - t^4$
	(+, +, -, -)	$G(xyx^{-1}yx^{-1}y^{-1})$	$-2 + 3t - 2t^2$
	(-, -, +, +)	$G(x^{-1}y^{-1}xy^{-1}xy)$	$-2 + 3t - 2t^2$



(+, +, +, +)	$G(x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1})$	$1 - 3t + 4t^2 - 2t^3 + t^4$
(-, -, -, -)	$G(xyxy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xy)$	$1 - 2t + 4t^2 - 3t^3 + t^4$
(+, +, +, -)	$G(x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1})$	$-1 + 4t - 4t^2 + 2t^3$
(-, -, -, +)	$G(xyxy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1}xy)$	$2 - 4t + 4t^2 - t^3$
(+, +, -, +)	$G(x^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1})$	$2 - 4t + 4t^2 - t^3$
(-, -, +, -)	$G(xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xy)$	$-1 + 4t - 4t^2 + 2t^3$
(+, +, -, -)	$G(x^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1})$	$1 - 2t + 4t^2 - 3t^3 + t^4$
(-, -, +, +)	$G(xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1}xy)$	$1 - 3t + 4t^2 - 2t^3 + t^4$
(+, -, +, +)	$G(x^{-1}yx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}y)$	$-1 + 3t - 4t^2 + 3t^3$
(-, +, -, -)	$G(xy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyxy^{-1})$	$3 - 4t + 3t^2 - t^3$
(+, -, +, -)	$G(x^{-1}yx^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}y)$	$1 - 4t + 5t^2 - t^3$
(-, +, -, +)	$G(xy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}yxy^{-1})$	$-1 + 5t - 4t^2 + t^3$
(+, -, -, +)	$G(x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}y)$	$-2 + 5t - 3t^2 + t^3$
(-, +, +, -)	$G(xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1}xyxy^{-1})$	$1 - 3t + 5t^2 - 2t^3$
(+, -, -, -)	$G(x^{-1}yxy^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}y)$	$-1 + 3t - 3t^2 + 3y^3 - t^4$
(-, +, +, +)	$G(xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}yxy^{-1})$	$-1 + 3t - 3t^2 + 3t^3 - t^4$



$(+, +, +, +)$	$G(x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y^{-1}xy)$	$1 - 2t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$
$(-, -, -, -)$	$G(xy x^{-1}y x y x^{-1}y^{-1})$	$1 - 2t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$
$(+, +, +, -)$	$G(x^{-1}y^{-1}xy x^{-1}y^{-1}xy^{-1})$	$3 - 4t + 2t^2$
$(-, -, -, +)$	$G(xy x^{-1}y^{-1}xy x^{-1}y)$	$2 - 4t + 3t^2$
$(+, +, -, +)$	$G(x^{-1}y x y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy)$	$1 - 3t + 4t^2 - t^3$
$(-, -, +, -)$	$G(xy^{-1}x^{-1}y x y x^{-1}y^{-1})$	$-1 + 4t - 3t^2 + t^3$
$(+, +, -, -)$	$G(x^{-1}y x y x^{-1}y^{-1}xy^{-1})$	$1 - 4t + 3t^2 - t^3$
$(-, -, +, +)$	$G(xy x^{-1}y^{-1}x^{-1}y x^{-1}y^{-1}xy)$	$-1 + 3t - 4t^2 + t^3$
$(+, -, +, +)$	$G(x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y xy)$	$-1 + 3t - 3t^2 + 2t^3$
$(-, +, -, -)$	$G(xy x^{-1}y x y^{-1}x^{-1}y^{-1})$	$2 - 3t + 3t^2 - t^3$
$(+, -, +, -)$	$G(x^{-1}y^{-1}xy x^{-1}y x y^{-1})$	$1 - 3t + 4t^2 - t^3$
$(-, +, -, +)$	$G(xy x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y)$	$-1 + 4t - 3t^2 + t^3$
$(+, -, -, +)$	$G(x^{-1}y x y^{-1}x^{-1}y xy)$	$-2 + 4t - 2t^2 + t^3$
$(-, +, +, -)$	$G(xy^{-1}x^{-1}y x y^{-1}x^{-1}y^{-1})$	$1 - 2t + 4t^2 - 2t^3$
$(+, -, -, -)$	$G(x^{-1}y x y x^{-1}y x y^{-1})$	$-1 + 2t - 2t^2 + 3t^3 - t^4$
$(-, +, +, +)$	$G(xy^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y)$	$-1 + 3t - 2t^2 + 2t^3 - t^4$