

On positive and almost alternating links

井上 和彦

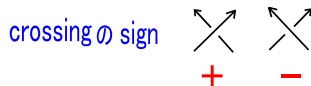
九州大学数理学府 D3

結び目の数学 VIII 2015/12/25

1. いくつかの定義とこれまでの結果 の紹介

oriented link と oriented diagram を考える

oriented link と oriented diagram を考える



oriented link と oriented diagram を考える



定義

positive diagram (P-diagram と書く):
すべての crossing の sign が $+$ である diagram.

oriented link と oriented diagram を考える



定義

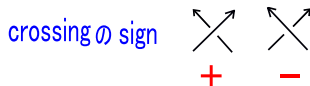
positive diagram (P-diagram と書く):

すべての crossing の sign が $+$ である diagram.

positive link (P-link と書く):

positive diagram をもつ link.

oriented link と oriented diagram を考える

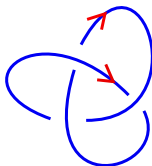


定義

positive diagram (P-diagram と書く):
すべての crossing の sign が $+$ である diagram.

positive link (P-link と書く):
positive diagram をもつ link.

P-diagram の例



定義

alternating diagram (A-diagram と書く):
crossing の上下関係が交互になっている diagram.

定義

alternating diagram (A-diagram と書く):
crossing の上下関係が交互になっている diagram.

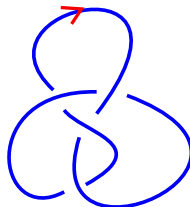
alternating link (A-link と書く):
alternating diagram をもつ link.

定義

alternating diagram (A-diagram と書く):
crossing の上下関係が交互になっている diagram.

alternating link (A-link と書く):
alternating diagram をもつ link.

A-diagram の例



定義

PA-diagram: positive-alternating diagram.

PA-link: PA-diagram をもつ link.

定義

PA-diagram: positive-alternating diagram.

PA-link: PA-diagram をもつ link.

P and A link:

P-diagram と A-diagram をもつ link ($P\#A$ -link と書く).
(これらが同時に実現するかどうかわからない)

定義

PA-diagram: positive-alternating diagram.

PA-link: PA-diagram をもつ link.

P and A link:

P-diagram と A-diagram をもつ link ($P\#A$ -link と書く).
(これらが同時に実現するかどうかわからない)

定理 (Nakamura, 2000)

P and A link は PA-diagram をもつ.
(つまり, PA -link である.)

定義

almost positive diagram (P'-diagram と書く):
one crossing change で P-diagram になる diagram.

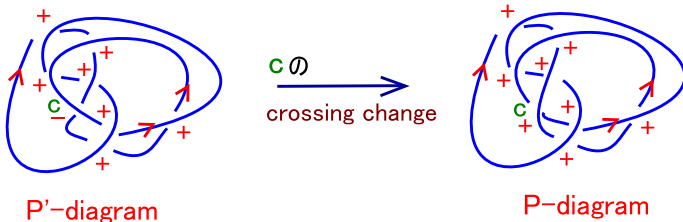
定義

almost positive diagram (P'-diagram と書く):
one crossing change で P-diagram になる diagram.
almost positive link (P'-link と書く):
P'-diagram をもち, P-diagram をもたない link.

定義

almost positive diagram (P'-diagram と書く):
one crossing change で P-diagram になる diagram.

almost positive link (P'-link と書く):
P'-diagram をもち, P-diagram をもたない link.



定義

almost alternating diagram (A'-diagram と書く):
one crossing change で A-diagram になる diagram.

定義

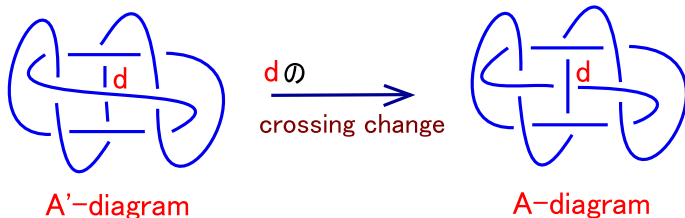
almost alternating diagram (A'-diagram と書く):
one crossing change で A-diagram になる diagram.

almost alternating link (A'-link と書く):
A'-diagram をもち, A-diagram をもたない link.

定義

almost alternating diagram (A'-diagram と書く):
one crossing change で A-diagram になる diagram.

almost alternating link (A'-link と書く):
A'-diagram をもち, A-diagram をもたない link.



$P\sharp A$ -link, $P'\sharp A$ -link, $P\sharp A'$ -link, $P'\sharp A'$ -link

$P\sharp A$ -link, $P'\sharp A$ -link, $P\sharp A'$ -link, $P'\sharp A'$ -link が考えられる

$P \sharp A$ -link, $P' \sharp A$ -link, $P \sharp A'$ -link, $P' \sharp A'$ -link

$P \sharp A$ -link, $P' \sharp A$ -link, $P \sharp A'$ -link, $P' \sharp A'$ -link が考えられる

link の性質	A (alternating)	A' (almost alternating)
P (positive)		
P' (almost positive)		

$P\sharp A$ -link, $P'\sharp A$ -link, $P\sharp A'$ -link, $P'\sharp A'$ -link

定理 (Stoimenow, 2005)

P' -link は A -link にはならない ($P'\sharp A$ -link は存在しない)

定理 (Stoimenow, 2005)

P' -link は A -link にはならない ($P' \sharp A$ -link は存在しない)

link の性質	A	A'
P	PA (Nakamura)	
P'	存在しない (Stoimenow)	

定理 (Stoimenow, 2005)

P' -link は A -link にはならない ($P'\sharp A$ -link は存在しない)

link の性質	A	A'
P	PA (Nakamura)	?
P'	存在しない (Stoimenow)	?

定理 (Stoimenow, 2005)

P' -link は A -link にはならない ($P'\sharp A$ -link は存在しない)

link の性質	A	A'
P	PA (Nakamura)	?
P'	存在しない (Stoimenow)	?

2. $P\sharp A'$ -link はどんな diagram をもつのか?

$P\sharp A'$ -diagram をもつ link part1

Question $P\sharp A'$ -link は, $P\sharp A'$ -diagram をもつのか？

$P\sharp A'$ -diagram をもつ link part1

Question $P\sharp A'$ -link は, $P\sharp A'$ -diagram をもつのか？

定理 1 (Inoue)

$P\sharp A'$ -diagram をもつ link は, PA-link である.

$P\sharp A'$ -diagram をもつ link part1

Question $P\sharp A'$ -link は, $P\sharp A'$ -diagram をもつのか？

定理 1 (Inoue)

$P\sharp A'$ -diagram をもつ link は, PA-link である.

証明の流れ (Jordan の曲線定理をつかう.)

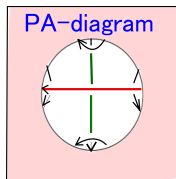
$P\#A'$ -diagram をもつ link part1

Question $P\#A'$ -link は, $P\#A'$ -diagram をもつのか？

定理 1 (Inoue)

$P\#A'$ -diagram をもつ link は, PA -link である.

証明の流れ ($Jordan$ の曲線定理をつかう.)



$P\#A'$ -diagram

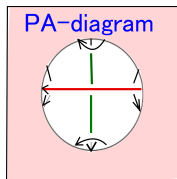
$P\sharp A'$ -diagram をもつ link part1

Question $P\sharp A'$ -link は, $P\sharp A'$ -diagram をもつのか?

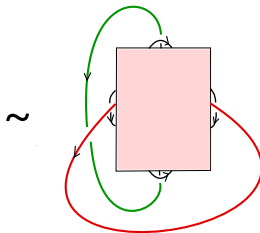
定理 1 (Inoue)

$P\sharp A'$ -diagram をもつ link は, PA -link である.

証明の流れ ($Jordan$ の曲線定理をつかう.)



$P\sharp A'$ -diagram



S^2 上の isotopy で
動かす

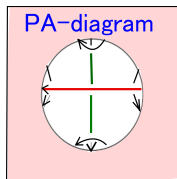
$P\sharp A'$ -diagram をもつ link part1

Question $P\sharp A'$ -link は, $P\sharp A'$ -diagram をもつのか?

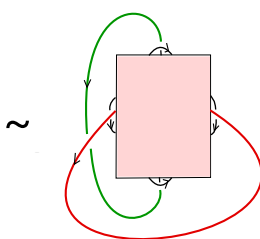
定理 1 (Inoue)

$P\sharp A'$ -diagram をもつ link は, PA -link である.

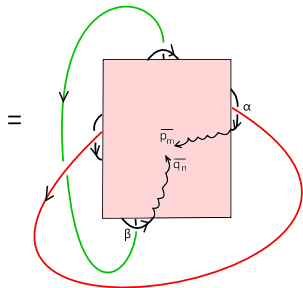
証明の流れ ($Jordan$ の曲線定理をつかう.)



$P\sharp A'$ -diagram

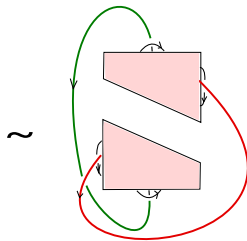


S^2 上の isotopy で
動かす

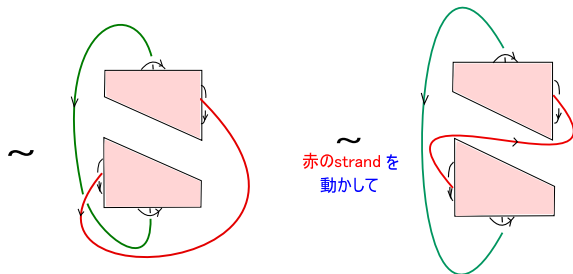


$\overline{p}_m$ と $\overline{q}_n$ は交わらない

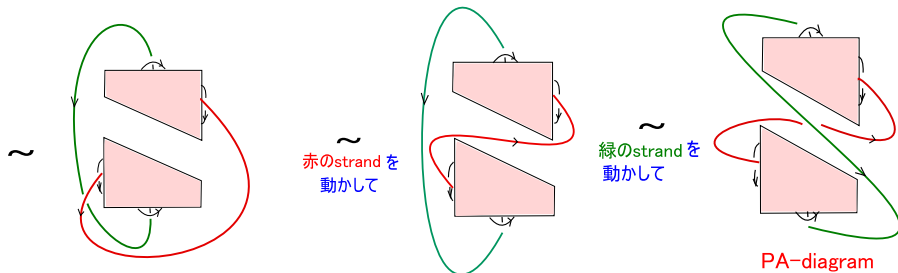
$P\sharp A'$ -diagram をもつ link part2



$P\sharp A'$ -diagram をもつ link part2



P#A'-diagram をもつ link part2



$P\sharp A'$ -link はどんな diagram をもつのか？

Question (again)

$P\sharp A'$ -link は, $P\sharp A'$ -diagram をもつのか？

$P\sharp A'$ -link はどんな diagram をもつのか？

Question (again)

$P\sharp A'$ -link は, $P\sharp A'$ -diagram をもつのか？

Answer

NO!!

$P\sharp A'$ -link はどんな diagram をもつのか？

Question (again)

$P\sharp A'$ -link は, $P\sharp A'$ -diagram をもつのか？

Answer

NO!!

Question

$P\sharp A'$ -link はどんな diagram をもつのか？

定義

$(PA)'$ -diagram: one crossing change をすることで
PA-diagram になる diagram

定義

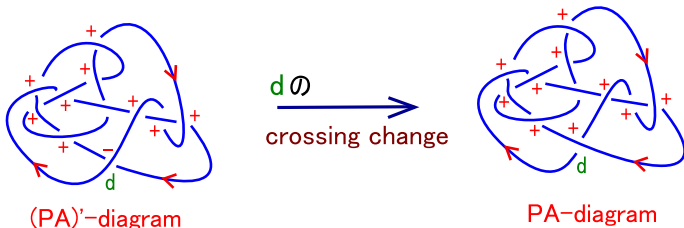
$(PA)'$ -diagram: one crossing change をすることで
PA-diagram になる diagram

$(PA)'$ -link: $(PA)'$ -diagram をもち,
PA-diagram をもたない link

定義

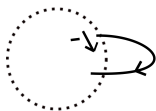
$(PA)'$ -diagram: one crossing change をすることで
PA-diagram になる diagram

$(PA)'$ -link: $(PA)'$ -diagram をもち,
PA-diagram をもたない link



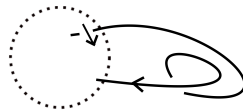
注意

任意の PA-link は $(PA)'$ -diagram をもつ.



PA-diagram

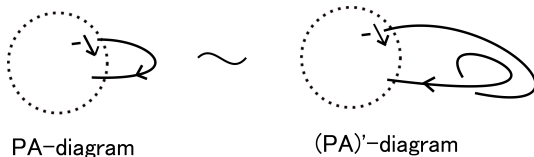
$\sim$



$(PA)'$ -diagram

PA-link の $(PA)'$ -diagram

注意 任意の PA-link は $(PA)'$ -diagram をもつ.



PA-link の $(PA)'$ -diagram

定理 (Cromwell, 1989)

11 交点以下の PA' -knot は $(PA)'$ -knot である.

定理 (Jong-Kishimoto, 2010)

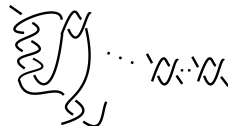
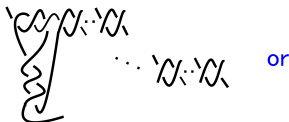
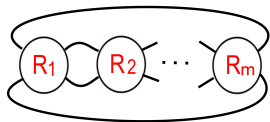
genus 2 までの P-knot は, PA-knot または $(PA)'$ -knot である.

3. Montesinos link について

Montesinos link に関する定理と命題

Montesinos link

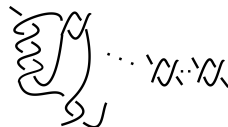
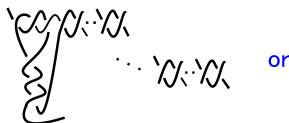
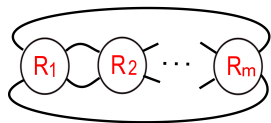
R_i は有理tangle



Montesinos link に関する定理と命題

Montesinos link

R_i は有理tangle



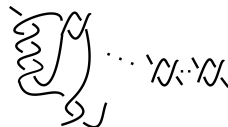
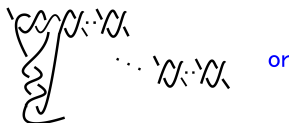
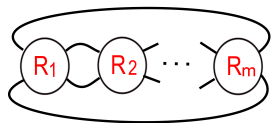
定理 (Abe–Kishimoto, 2010)

Montesinos link は A-link または A'-link である.

Montesinos link に関する定理と命題

Montesinos link

R_i は有理tangle



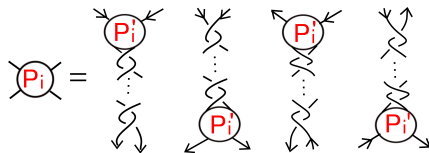
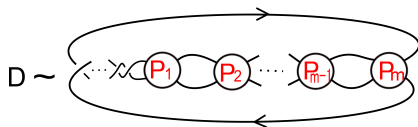
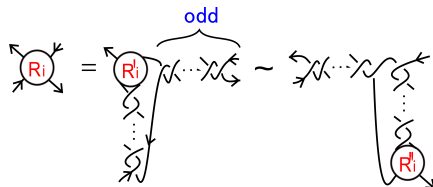
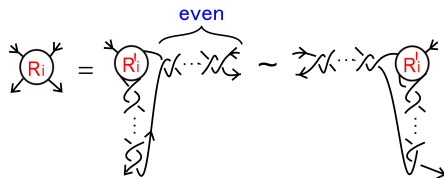
定理 (Abe-Kishimoto, 2010)

Montesinos link は A-link または A'-link である.

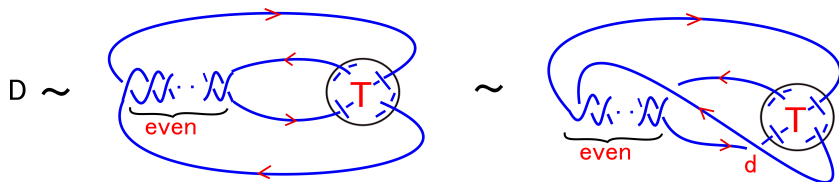
定理 2 (Inoue)

標準的 diagram として P-diagram をもつ Montesinos link は PA-link または (PA)'-link である.

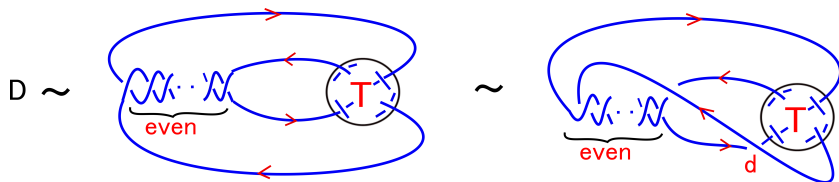
証明の流れ



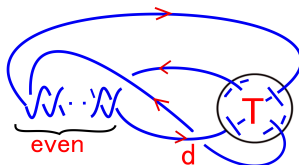
証明の流れ (続き)



証明の流れ (続き)



$\xrightarrow{\text{d の crossing change}}$



PA-diagram

4. 今後に向けて

今後に向けて

$P' \# A'$ -link については, **knot 10₁₄₅** の鏡像が $P' \# A'$ -knot であり, かつ $(PA)'$ -diagram をもつことが知られている.

今後に向けて

$P \# A'$ -link については, $\text{knot } 10_{145}$ の鏡像が $P \# A'$ -knot であり, かつ $(PA)'$ -diagram をもつことが知られている.

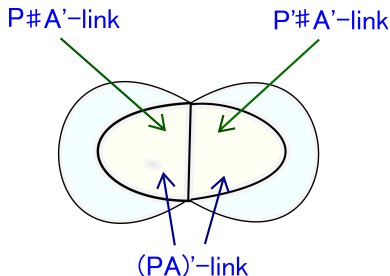
つまり, $(PA)'$ -link であれば, $P \# A'$ -link または $P' \# A'$ -link のいずれかである.

今後に向けて

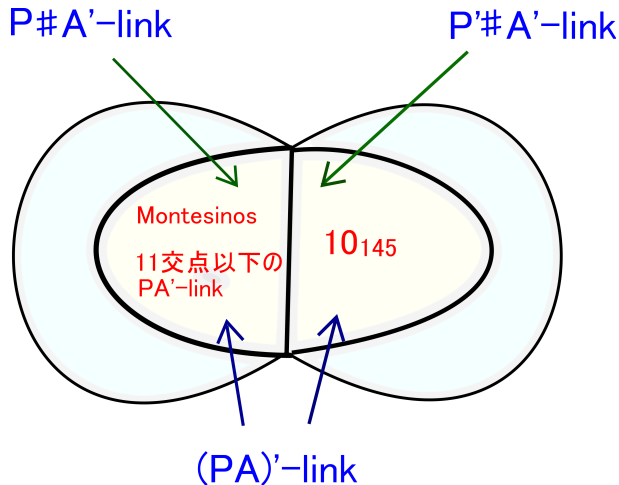
$P \# A'$ -link については, **knot 10₁₄₅** の鏡像が $P' \# A'$ -knot であり, かつ $(PA)'$ -diagram をもつことが知られている.

つまり, **$(PA)'$ -link** であれば, $P \# A'$ -link または $P' \# A'$ -link のいずれかである.

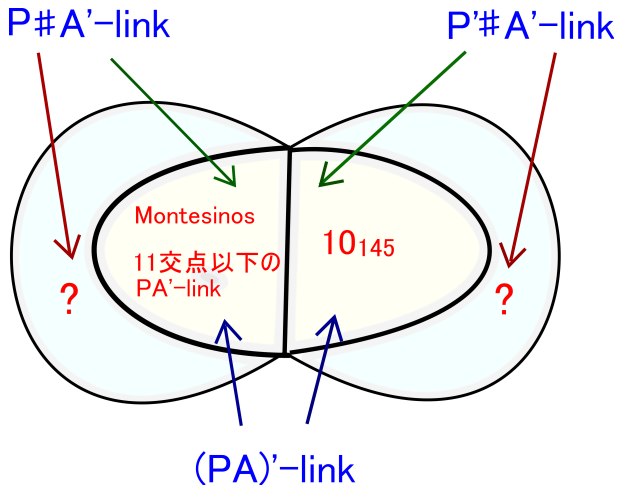
$$\{(PA)'\text{-link}\} \subset \{P \# A'\text{-link}\} \cup \{P' \# A'\text{-link}\}$$



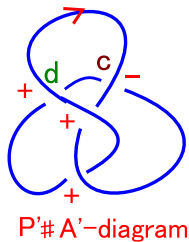
今後に向けて



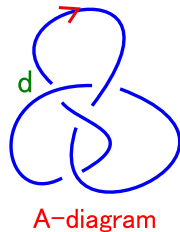
今後に向けて



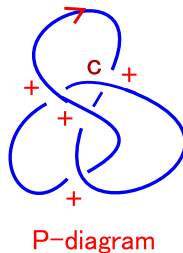
P' # A'-diagram の例



d の
crossing change

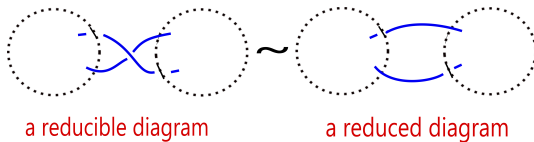


c の
crossing change



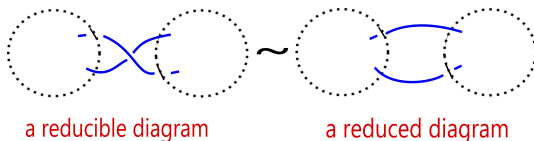
事実

$P\sharp A'$ -diagram は reduced ではない.



事実

$P \# A'$ -diagram は reduced ではない.



(理由: **adequate** 性に着目する)

P -diagram $\Rightarrow$ + adequate,

reduced A' -diagram $\Rightarrow$ non-adequate (+ adequate でも - adequate でもない).