

s^1 -oriented handlebody-link diagram と multiple conjugation quandle

飯島 悠介 (筑波大学 M1)

- coloring に付随する代数系

ori. knot	ori. R1–3	quandle
unori. knot	unori. R1–3	symmetric quandle
S^1 -ori. handlebody-link	Y-ori. R1–6	???
unori. handlebody-link	unori. R1–6	MCQ

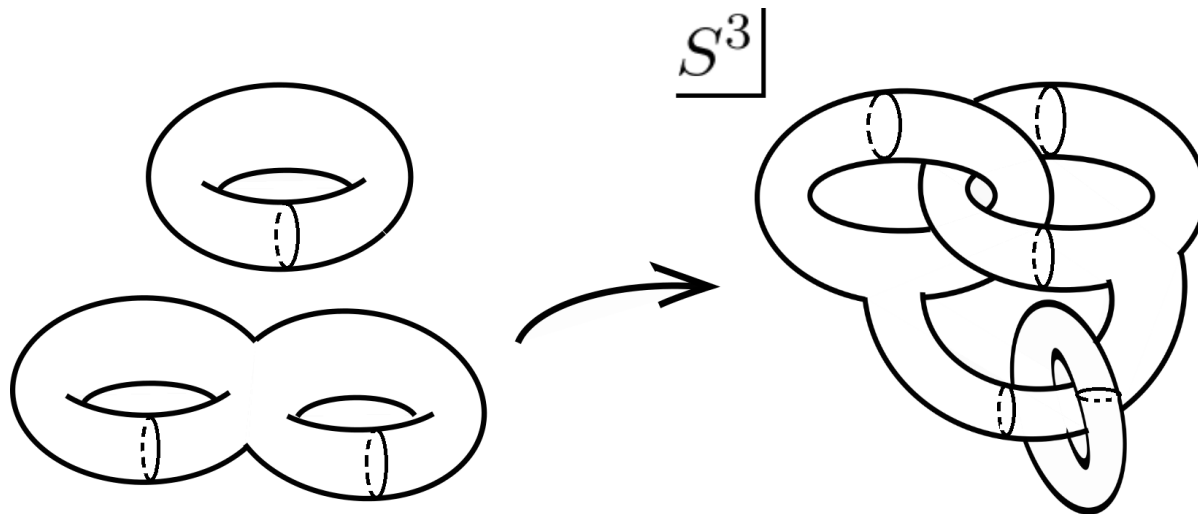
- coloring に付随する代数系

ori. knot	ori. R1–3	quandle
unori. knot	unori. R1–3	symmetric quandle
S^1 -ori. handlebody-link	Y-ori. R1–6	MCQ
unori. handlebody-link	unori. R1–6	MCQ

Def

handlebody-link

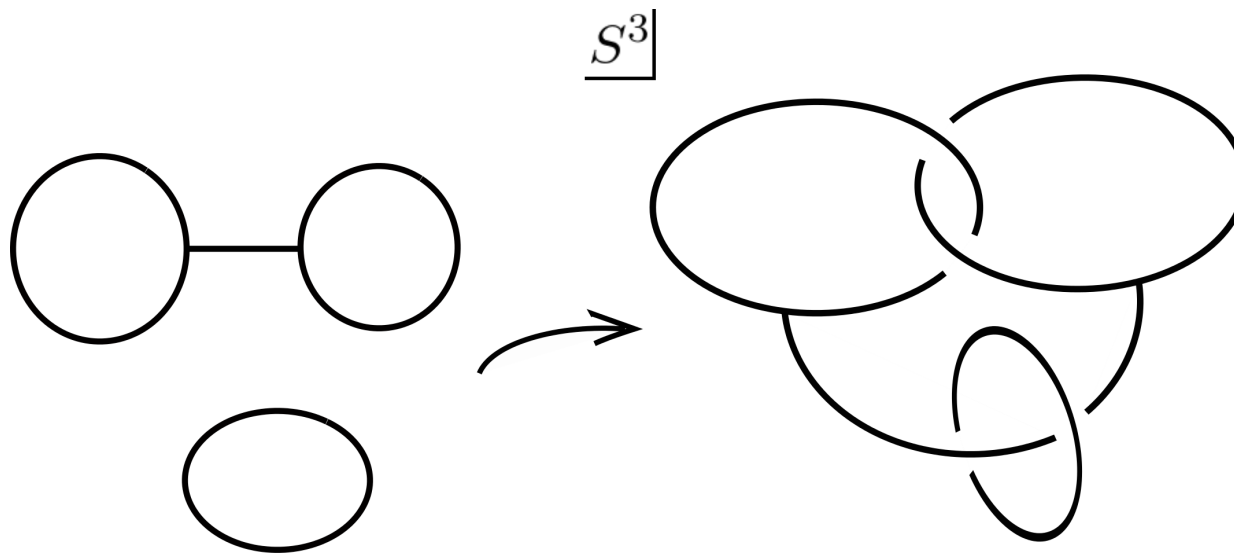
$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S^3$ に埋め込まれたいくつかの handlebody



Def

spatial trivalent graph

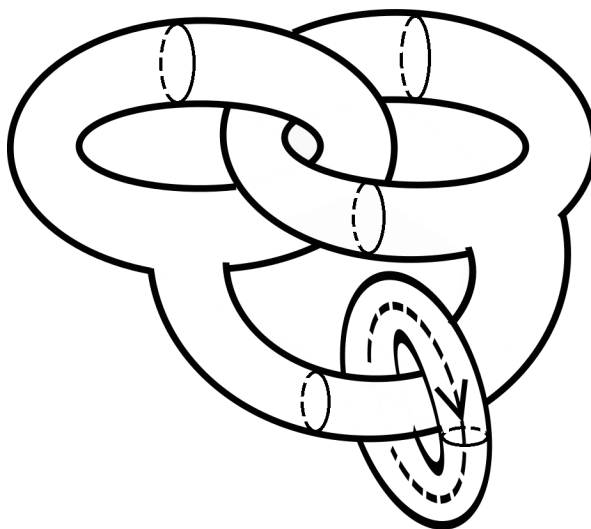
$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S^3$ に埋め込まれた finite trivalent graph



Def

- S^1 -oriented handlebody-link

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ handlebody-link の種数 1 の成分のみに向きを入れたもの



- $H, H' : S^1$ -oriented handlebody-link

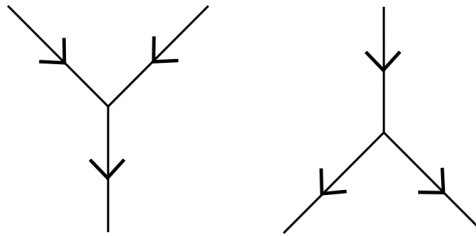
$H \cong H' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists f : S^3 \rightarrow S^3 : \text{ori-pres. homeo s.t. } f(H) = H'$
(S^1 -ori込み)

Def

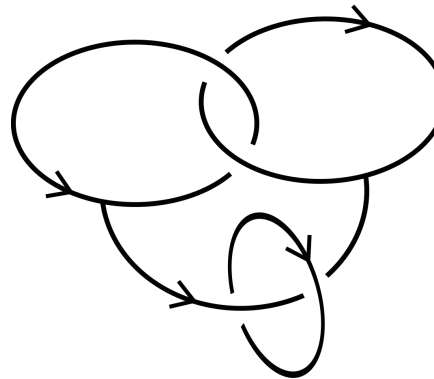
Y-oriented spatial trivalent graph

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ spatial trivalent graph の edge に, 向きを入れたもの.

ただし, 各 vertex で下図を満たす.



Ex



Y-oriented spatial trivalent graph の例

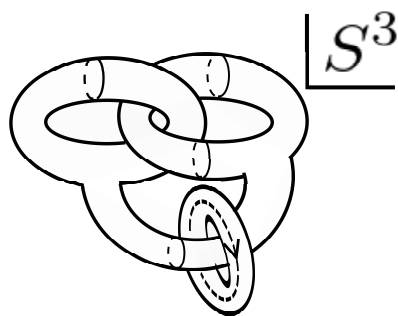
Def

H : S^1 -oriented handlebody-link

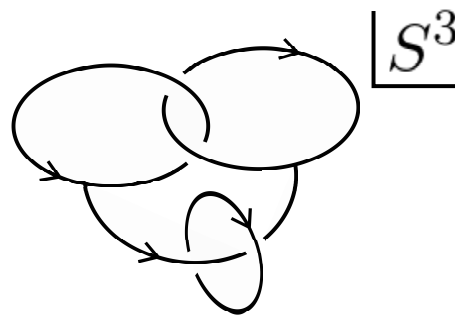
K : Y-oriented spatial trivalent graph

K は H を表す

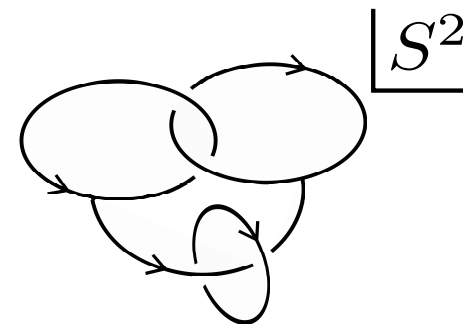
$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ K の正則近傍が H であり, 種数 1 の成分の向きが一致する



S^1 -ori.handlebody-link



spa.tri. graph



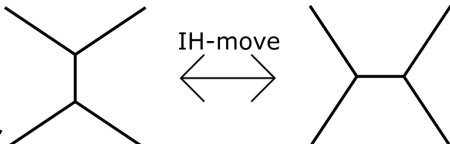
diagram

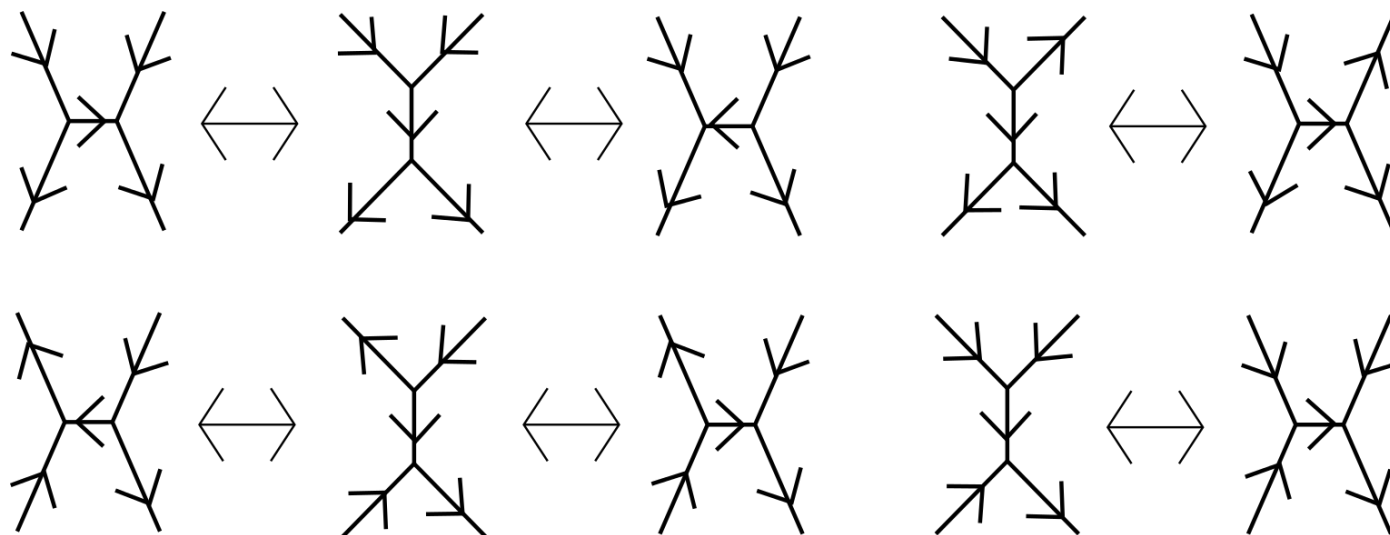
K の diagram を H の diagram とする.

Def

2つのY-oriented spatial trivalent graphの間の

Y-oriented IH-move

def $\Leftrightarrow$ 局所的な変形  に Y-orientation を入れたもの



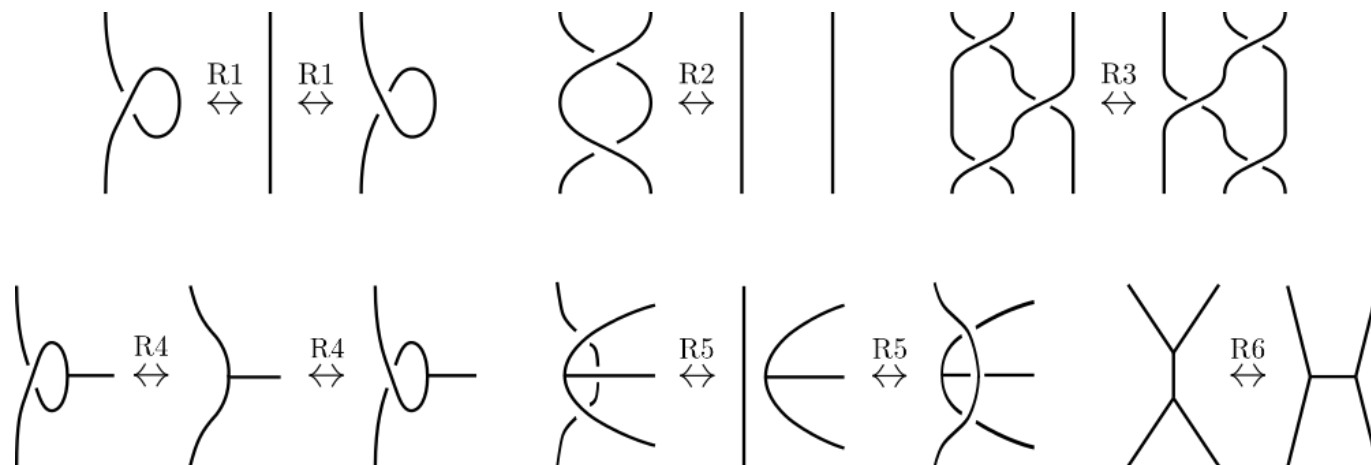
Y-oriented IH-move

Def

2つの S^1 -oriented handlebody-link diagram の間の

Y-oriented Reidemeister move

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 以下の変形に Y-orientation を入れたもの



S^1 -ori. handlebody-link に対する Reidemeister move

Thm [Ishii]

$H, H' : S^1$ -oriented handlebody-link

$K, K' : H, H'$ を表す Y-oriented spatial trivalent graph

$D, D' : H, H'$ の diagram

以下は同値

- $H \cong H'$
- K, K' は Y-oriented IH-move で移りあう.
- D, D' は Y-oriented Reidemeister move で移りあう.

Def

Q : quandle

$P \subset Q \times Q, \mu : P \rightarrow Q ; (a, b) \mapsto ab$

H : S^1 -oriented handlebody-link

D : H の diagram

• $C : \mathcal{A}(D) \rightarrow Q$: (Q, P) -coloring

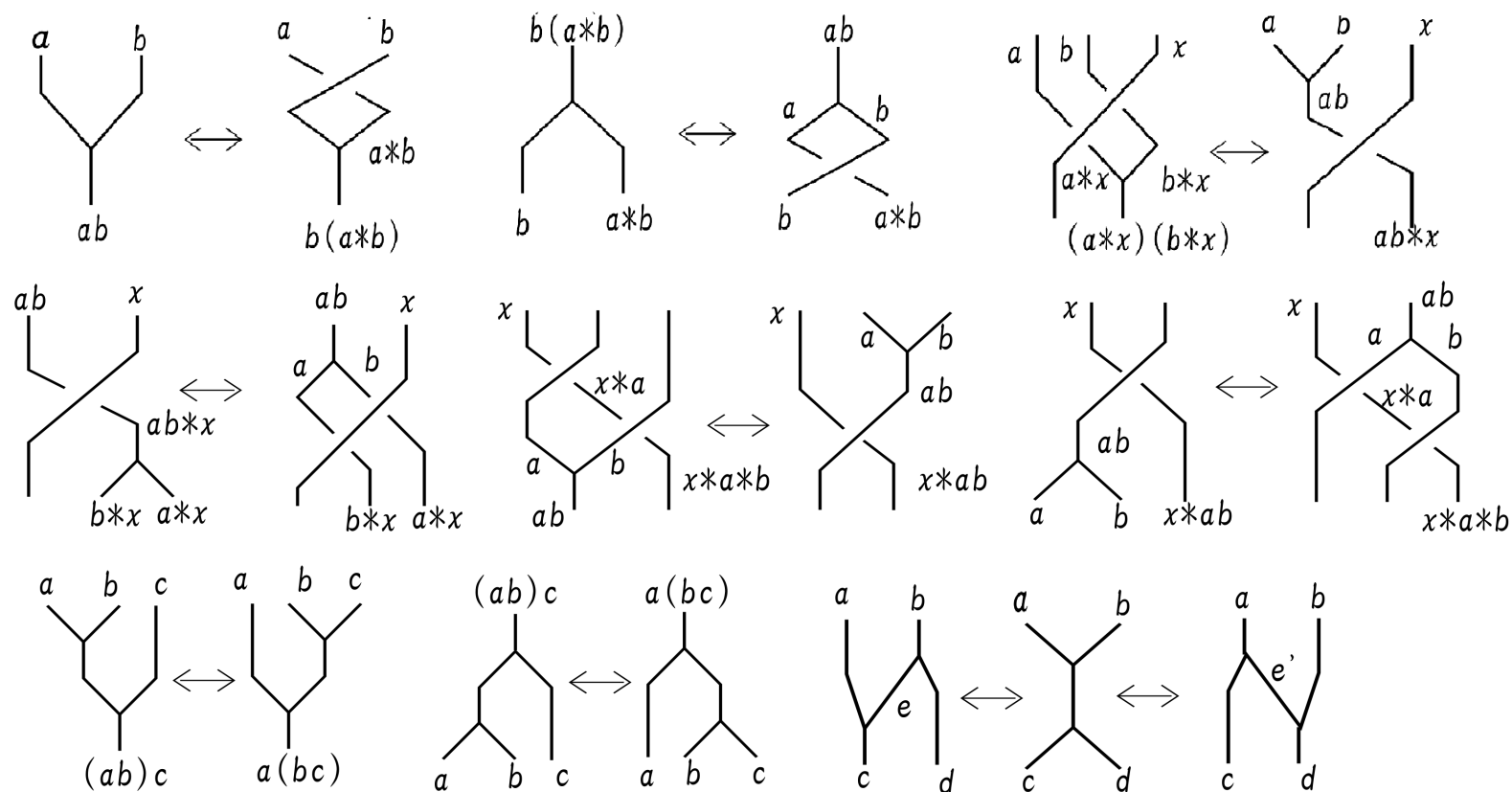
$$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \xrightarrow{b} \\ \text{---} \downarrow \text{---} \\ a \quad ab \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow a \quad \nwarrow b \\ \downarrow \\ ab \end{array} & \begin{array}{c} \nwarrow b \quad \nearrow a \\ \uparrow \\ ab \end{array} \end{array} \right.$$

$\mathcal{A}(D)$ は D の arc 全体を表す.

• $\text{Col}_{(Q,P)}(D) := \{D \text{ の } (Q, P)\text{-coloring}\}$

Lem

以下の Y-oriented R-move と oriented R1-R3 move で 全ての Y-oriented R-move を表せる. ただし, Y-ori. は上から下に入る.



Y-oriented R-move

Rem Reidemeister moveを代数化した条件. ($x \in Q$)

$$(P1). (a, b) \in P \Leftrightarrow (b, a * b) \in P$$

$$(a, b) \in P \Rightarrow ab = b(a * b).$$

$$(P2). (a, b) \in P \Leftrightarrow (a * x, b * x) \in P$$

$$(a, b) \in P \Rightarrow ab * x = (a * x)(b * x).$$

$$(P3). (a, b) \in P \Rightarrow x * ab = (x * a) * b.$$

$$(P4). (a, b), (ab, c) \in P \Leftrightarrow (a, bc), (b, c) \in P$$

$$(a, b), (ab, c) \in P \Rightarrow (ab)c = a(bc).$$

$$(P5). (a, b), (c, d) \in P, ab = cd$$

$$\Rightarrow \exists! e \in Q \text{ s.t. } (a, e), (e, d) \in P, ae = c, b = ed$$

$$(P6). (a, e), (e, d) \in P$$

$$\Rightarrow (ae, d), (a, ed) \in P, (ae)d = a(ed)$$

Main Thm

$(Q, *)$: quandle

$P \subset Q \times Q$ s.t. $Q = \bigcup_{(a,b) \in P} \{a, b\}$

$\mu : P \rightarrow Q$

が, (P1)–(P6) を満たすとき,

Q : multiple conjugation quandle

Def

G_λ : group ($\lambda \in \Lambda$)

$Q := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$

$(Q, *)$: multiple conjugation quandle

$\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (Q, *)$: quandle であり, $a, b \in G_\lambda$, $x \in Q$ に対し,

$$a * b = b^{-1}ab, \quad x * ab = (x * a) * b, \quad ab * x = (a * x)(b * x)$$

Lem

- $\forall a \in Q, \exists! e_a \in Q$ s.t. $ae_a = a = e_aa$
- $(a, b) \in P \Leftrightarrow e_a = e_b$

$$a \sim b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in P$$

による同値類分割を

$$Q = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

で表す.

Proof of Main Thm

(G_λ, μ) : 群

- $a, b \in G_\lambda$ とすると, $(a, b) \in P$

$e = e_a = e_b$ に対し, (P4) より, $ab = (ea)b = e(ab)$

同様に $ab = a(be) = (ab)e$

よって, $e_{ab} = e$, $a \sim ab$ i.e. $ab \in G_\lambda$

- associativity は, (P4) からわかる.

(P4). $(a, b), (ab, c) \in P \Leftrightarrow (a, bc), (b, c) \in P$

$(a, b), (ab, c) \in P \Rightarrow (ab)c = a(bc).$

• $a \in G_\lambda$: fix $e_\lambda := e_a$

$\forall b \in G_\lambda, a \sim b$ より, $e_\lambda = e_a = e_b$

Lem より, $be_\lambda = b = e_\lambda b$

したがって, $e_\lambda : G_\lambda$ の identity

• $\forall a \in G_\lambda, ae_\lambda = a = e_\lambda a$

(P5) より, $\exists! a^{-1} \in Q, aa^{-1} = e_\lambda = a^{-1}a$

したがって, a^{-1} : a の inverse

(P5) $(a, b), (c, d) \in P, ab = cd$

$\Rightarrow \exists! e \in Q$ s.t. $(a, e), (e, d) \in P, ae = c, b = ed$

$$Q = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda : \text{multiple conjugation quandle}$$

$\therefore$) $\forall a, b \in G_\lambda, x \in Q$ に対して, $(a, b) \in P$ なので,

- (P1) より, $b(a * b) = ab$ より, $a * b = b^{-1}ab$
- (P3) より, $x * (ab) = (x * a) * b$
- (P2) より, $(a * x, b * x) \in P$, $(ab) * x = (a * x)(b * x)$

$$(P1). \quad (a, b) \in P \Rightarrow ab = b(a * b).$$

$$(P2). \quad (a, b) \in P \Rightarrow ab * x = (a * x)(b * x).$$

$$(P3). \quad (a, b) \in P \Rightarrow x * ab = (x * a) * b.$$

- まとめ

S^1 -oriented handlebody-link diagram への
coloring を定義



coloring に付随する条件を抽出
(Y-ori. R-move の代数化)



条件を満たす代数系は MCQ

ご清聴ありがとうございました !!