142857 の秘密

谷山公規

(早稲田大学 教育学部)

2017年 3月 27日 (月)
数学オリンピック表彰式

巡回数 142857

142857 × 1 = 142857

〃 × 2 = 285714

〃 × 3 = 428571

〃 × 4 = 571428

〃 × 5 = 714285

〃 × 6 = 857142

〃 × 7 = 999999

$$
\begin{array}{r}
0.142857 \\
7\,\overline{)\,1} \\
0 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
0.285714 \\
7\,\overline{)\,2} \\
0 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
2
\end{array}
$$

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.\underbrace{142857}_{\downarrow \times 2}\underbrace{142857}_{\downarrow \times 2}\cdots\cdots$$

$$\downarrow \times 2$$

$$\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4} = 0.\overbrace{285714}\overbrace{285714}\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.\underbrace{142857}\underbrace{142857}\cdots$$

$$\downarrow \times 2 \qquad\qquad \downarrow \times 2 \qquad \downarrow \times 2$$

$$\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4} = 0.\overbrace{285714}\overbrace{285714}\cdots$$

$$\times 7 \qquad\qquad \times 7 \qquad \times 7$$

$$1 = \frac{7}{7} = 0.\dot{9} \qquad = 0.\overbrace{999999}\overbrace{999999}\cdots$$

$$a_1 = 0.9,\quad a_2 = 0.99,\quad a_3 = 0.999,\quad \cdots$$

$$0.\dot{9} = \lim_{n \to \infty} a_n$$

$$142857 \times 1 = 142857$$
$$\text{〃} \times 3 = 428571$$
$$\text{〃} \times 2 = 285714$$
$$\text{〃} \times 6 = 857142$$
$$\text{〃} \times 4 = 571428$$
$$\text{〃} \times 5 = 714285$$

$$
\begin{array}{r}
0.076923 \\
13\,\big)\,1 \\
0 \\
\hline
10 \\
0 \\
\hline
100 \\
91 \\
\hline
90 \\
78 \\
\hline
120 \\
117 \\
\hline
30 \\
26 \\
\hline
40 \\
39 \\
\hline
1
\end{array}
$$

$$\frac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3}$$

076923	$\times$	1	$=$	076923
〃	$\times$	10	$=$	769230
〃	$\times$	9	$=$	692307
〃	$\times$	12	$=$	923076
〃	$\times$	3	$=$	230769
〃	$\times$	4	$=$	307692

$$
\begin{array}{r}
0.153846 \\
13 \overline{\smash{)}\,2} \\
0 \\
\hline
20 \\
13 \\
\hline
70 \\
65 \\
\hline
50 \\
39 \\
\hline
110 \\
104 \\
\hline
60 \\
52 \\
\hline
80 \\
78 \\
\hline
2
\end{array}
$$

$$\frac{2}{13} = 0.\dot{1}5384\dot{6}$$

$$
\begin{array}{rcl}
076923 \times 2 & = & 153846 \\
\text{〃} \times 7 & = & 538461 \\
\text{〃} \times 5 & = & 384615 \\
\text{〃} \times 11 & = & 846153 \\
\text{〃} \times 6 & = & 461538 \\
\text{〃} \times 8 & = & 615384 \\
\text{〃} \times 13 & = & 999999
\end{array}
$$

$$\frac{1}{17} = 0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$$

$$
\begin{array}{l}
\quad\; 0.0588235294117647 \\
17 \,\big)\, 1 \\
\quad\; 0 \\
\hline
\quad\; 10 \\
\quad\;\; 0 \\
\hline
\quad\; 100 \\
\quad\;\; 85 \\
\hline
\quad\; 150 \\
\quad\; 136 \\
\hline
\quad\; 140 \\
\quad\; 136 \\
\hline
\quad\; 40 \\
\quad\; 34 \\
\hline
\quad\; 60 \\
\quad\; 51 \\
\hline
\quad\; 90 \\
\quad\; 85 \\
\hline
\quad\; 50 \\
\quad\; 34 \\
\hline
\quad\; 160 \\
\quad\; 153 \\
\hline
\quad\; 70 \\
\quad\; 68 \\
\hline
\quad\; 20 \\
\quad\; 17 \\
\hline
\quad\; 30 \\
\quad\; 17 \\
\hline
\quad\; 130 \\
\quad\; 119 \\
\hline
\quad\; 110 \\
\quad\; 102 \\
\hline
\quad\; 80 \\
\quad\; 68 \\
\hline
\quad\; 120 \\
\quad\; 119 \\
\hline
\quad\;\;\; 1
\end{array}
$$

0588235294117647	× 1	=	0588235294117647
〃	×10	=	5882352941176470
〃	×15	=	8823529411764705
〃	×14	=	8235294117647058
〃	× 4	=	2352941176470588
〃	× 6	=	3529411764705882
〃	× 9	=	5294117647058823
〃	× 5	=	2941176470588235
〃	×16	=	9411764705882352
〃	× 7	=	4117647058823529
〃	× 2	=	1176470588235294
〃	× 3	=	1764705882352941
〃	×13	=	7647058823529411
〃	×11	=	6470588235294117
〃	× 8	=	4705882352941176
〃	×12	=	7058823529411764

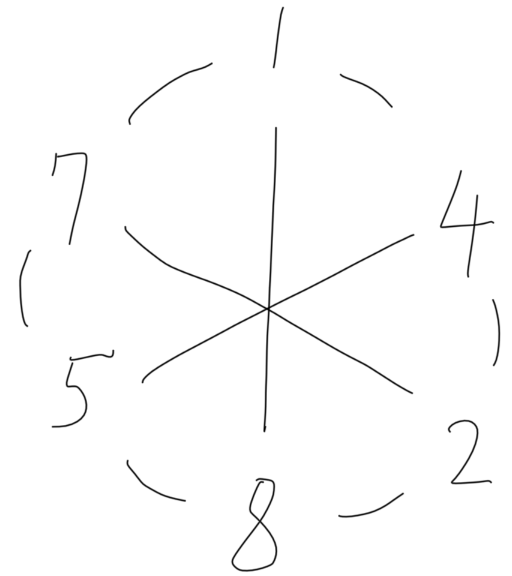
$$\frac{1}{7} = 0.\underbrace{\dot{1}4285\dot{7}}_{6=7-1} \qquad \frac{1}{13} = 0.\underbrace{\dot{0}7692\dot{3}}_{6=(13-1)\div 2}$$

$$\frac{1}{17} = 0.\underbrace{\dot{0}58823529411764\dot{7}}_{16=17-1}$$

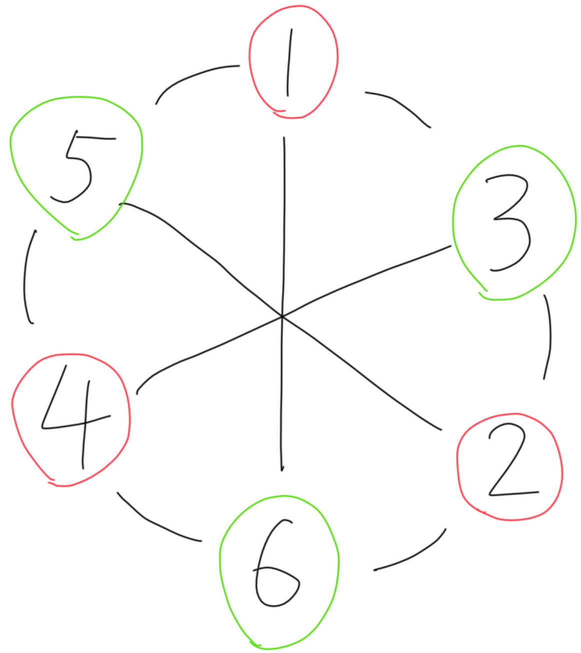
定理　P：素数，$P \neq 2, 5$

$\frac{1}{P}$ を循環小数で表したときの循環の長さは $P-1$ の約数である。

未解決問題　循環の長さが $P-1$ となる素数 P は無限個あるか？



和9

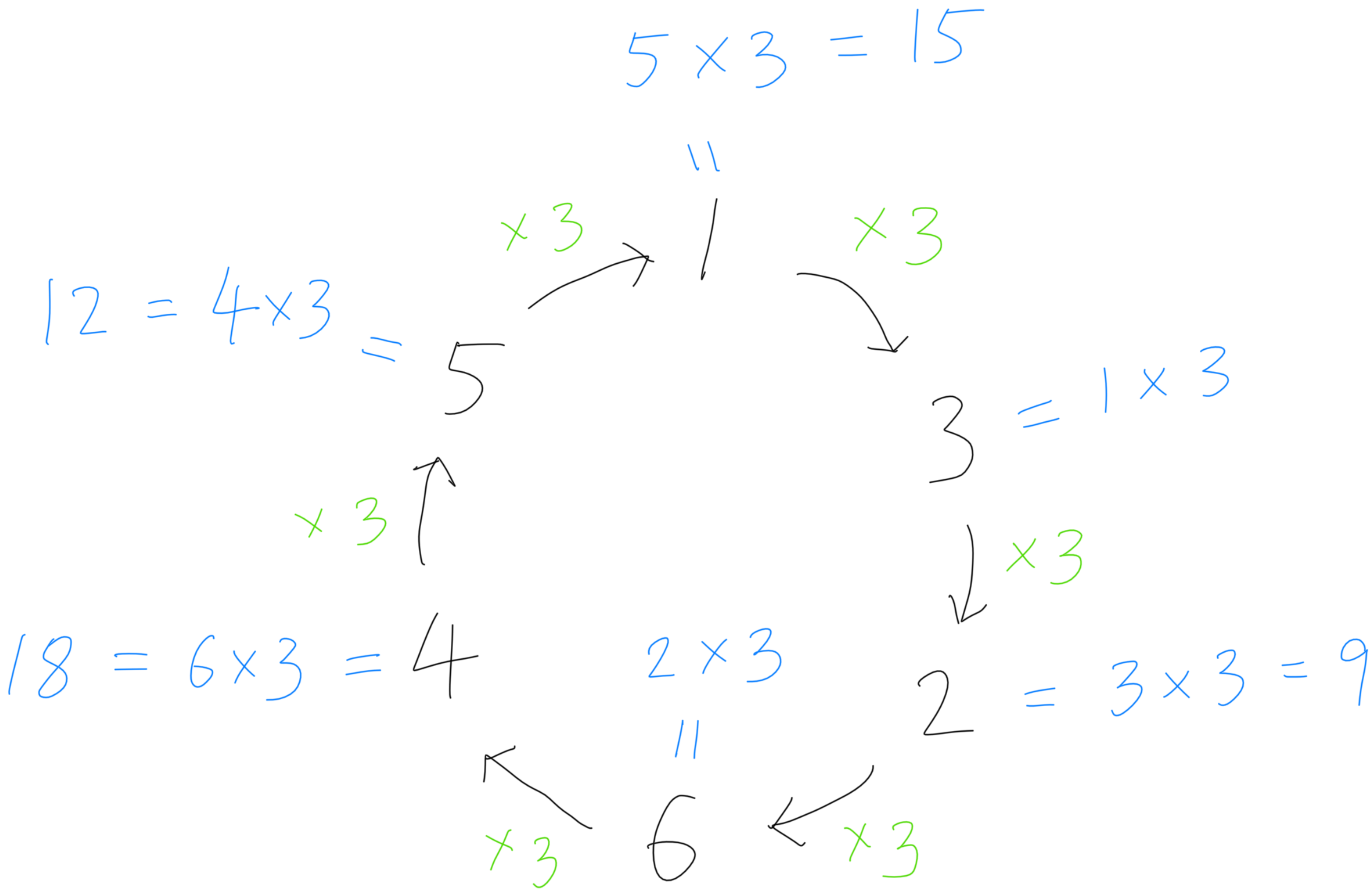


和7 和7の倍数

和7

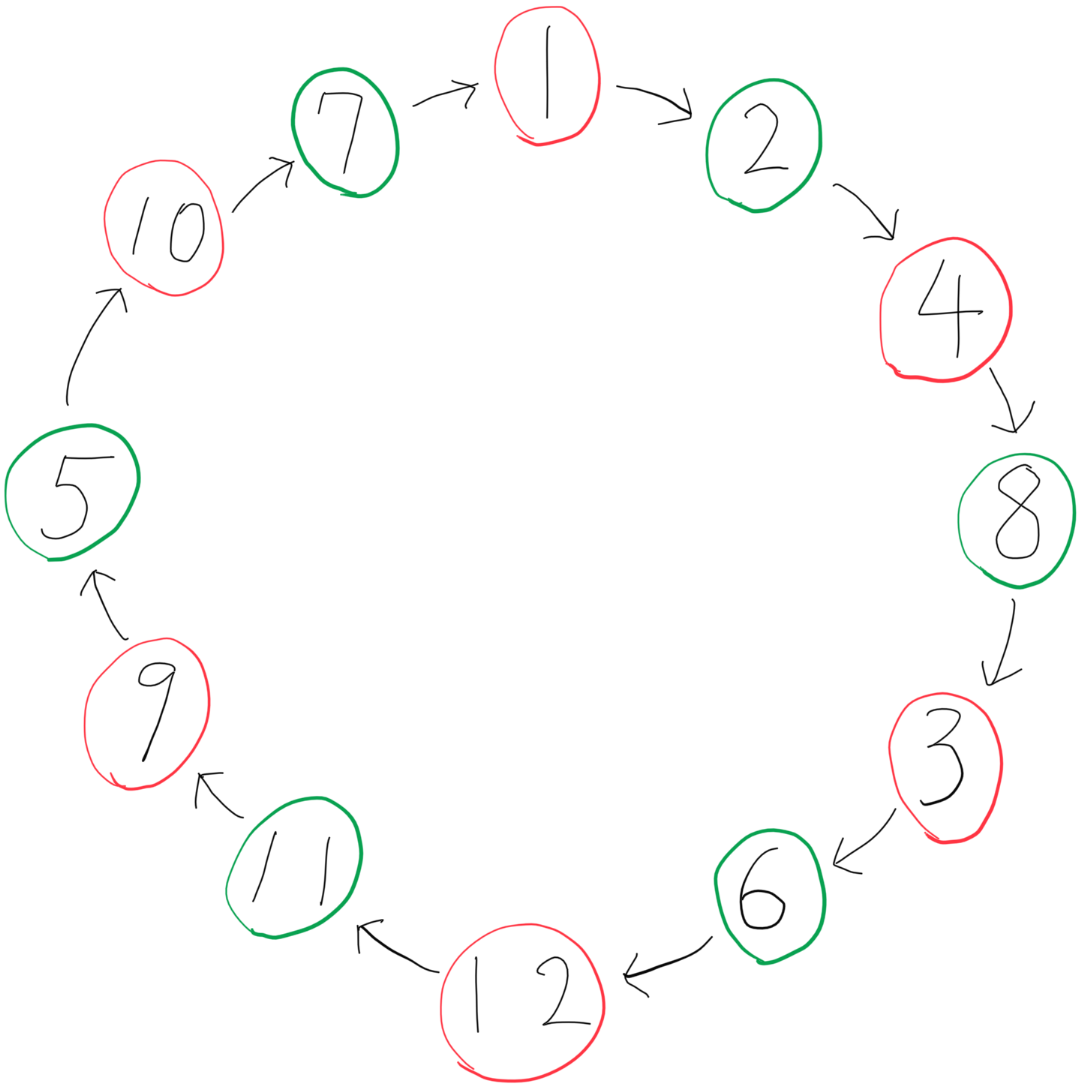
$$1 \to 3 \to 2 \to 6 \to 4 \to 5 \to 1$$

$x \to y$: $10x$を7で割った余りがy

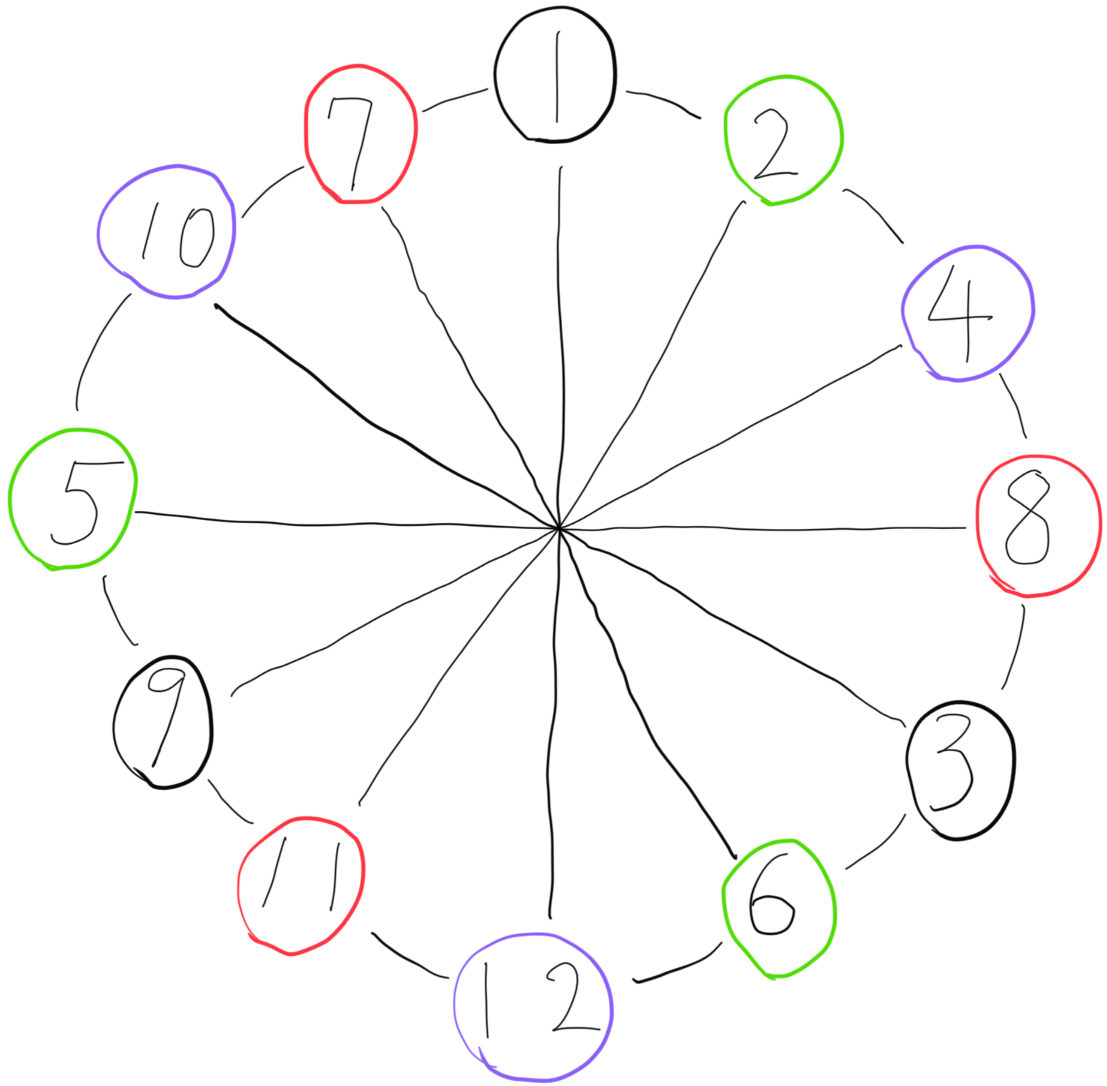


$x \to y$: $3x$ を7で割った余りが y

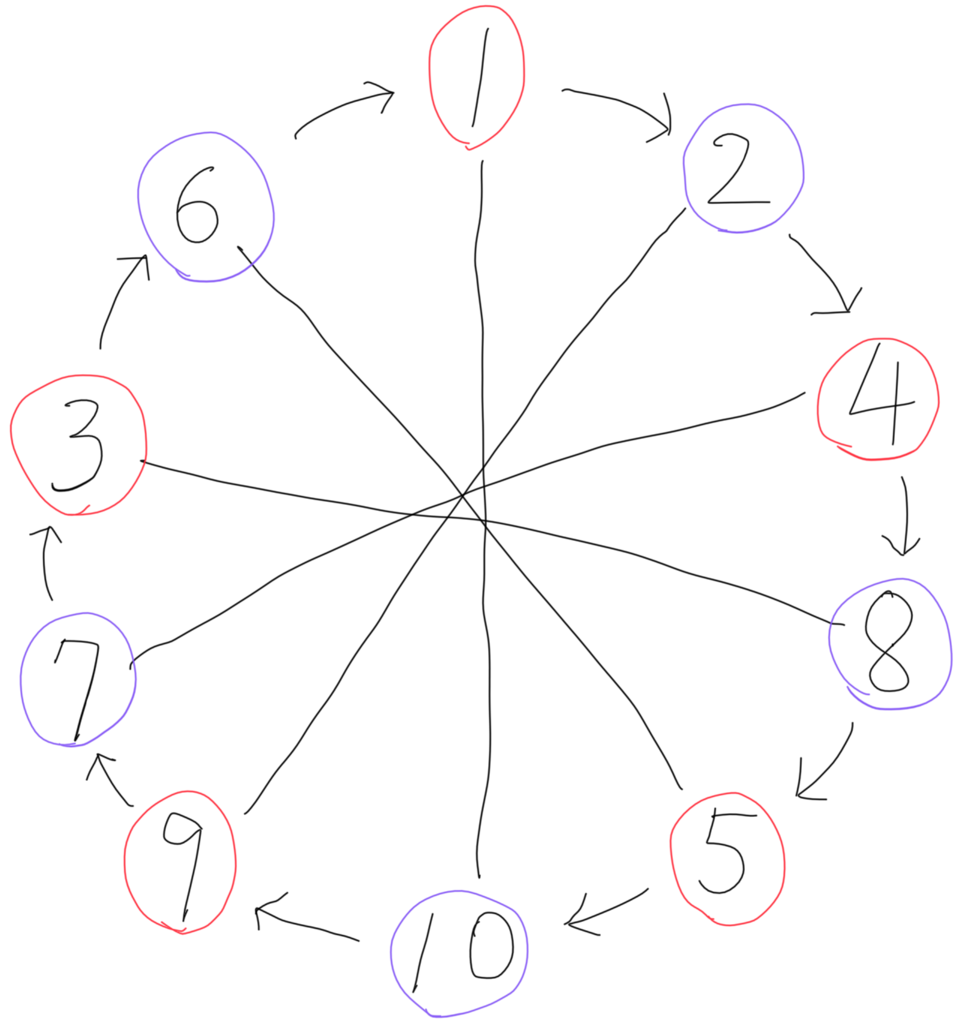
変な時計（$x \to y$: $2x$を13で割った余りがy）



変な時計



$x \to y$: $2x$ を 11 で割った余りが y



和 11

和 11 の倍数

和 11 の倍数

p：素数

有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の乗法群

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ は巡回群。

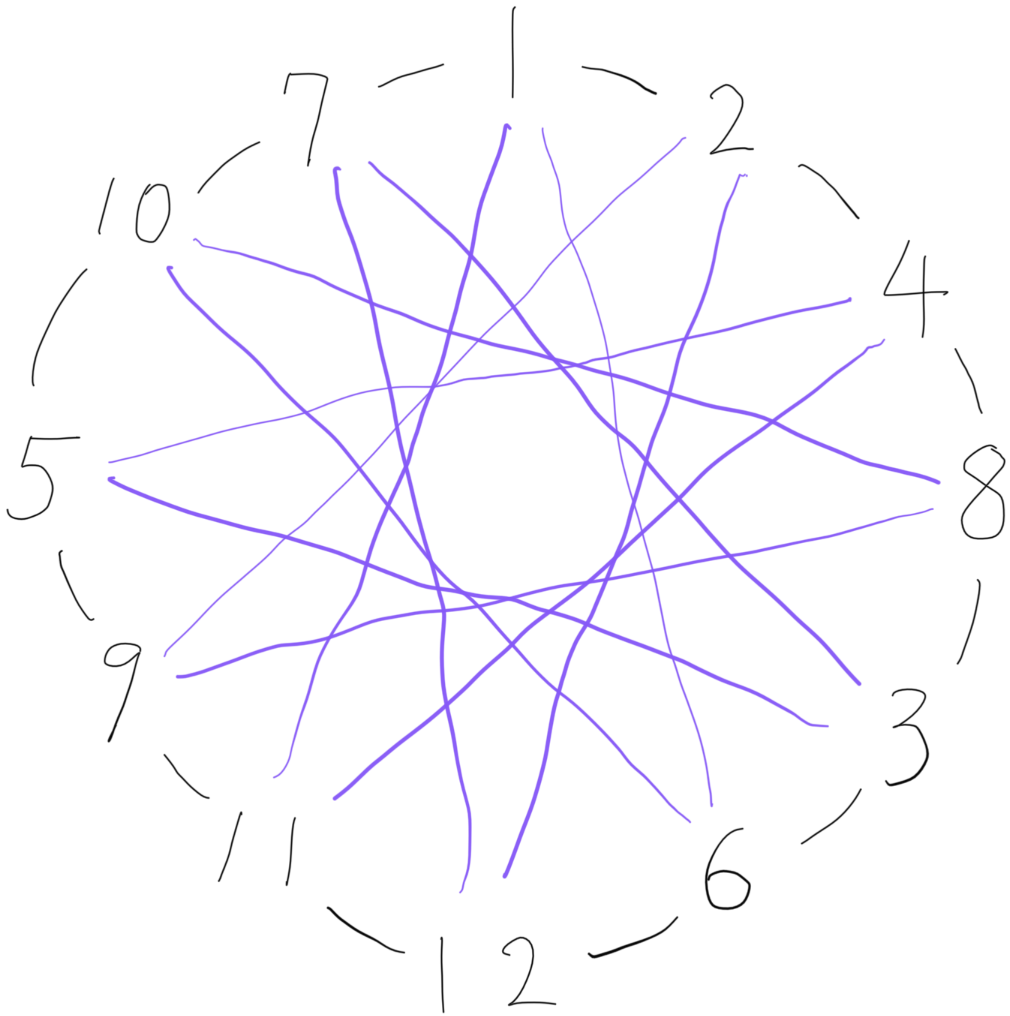
$X^n = 1$　(n は $p-1$ の約数)

$\Rightarrow X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1) = 0$

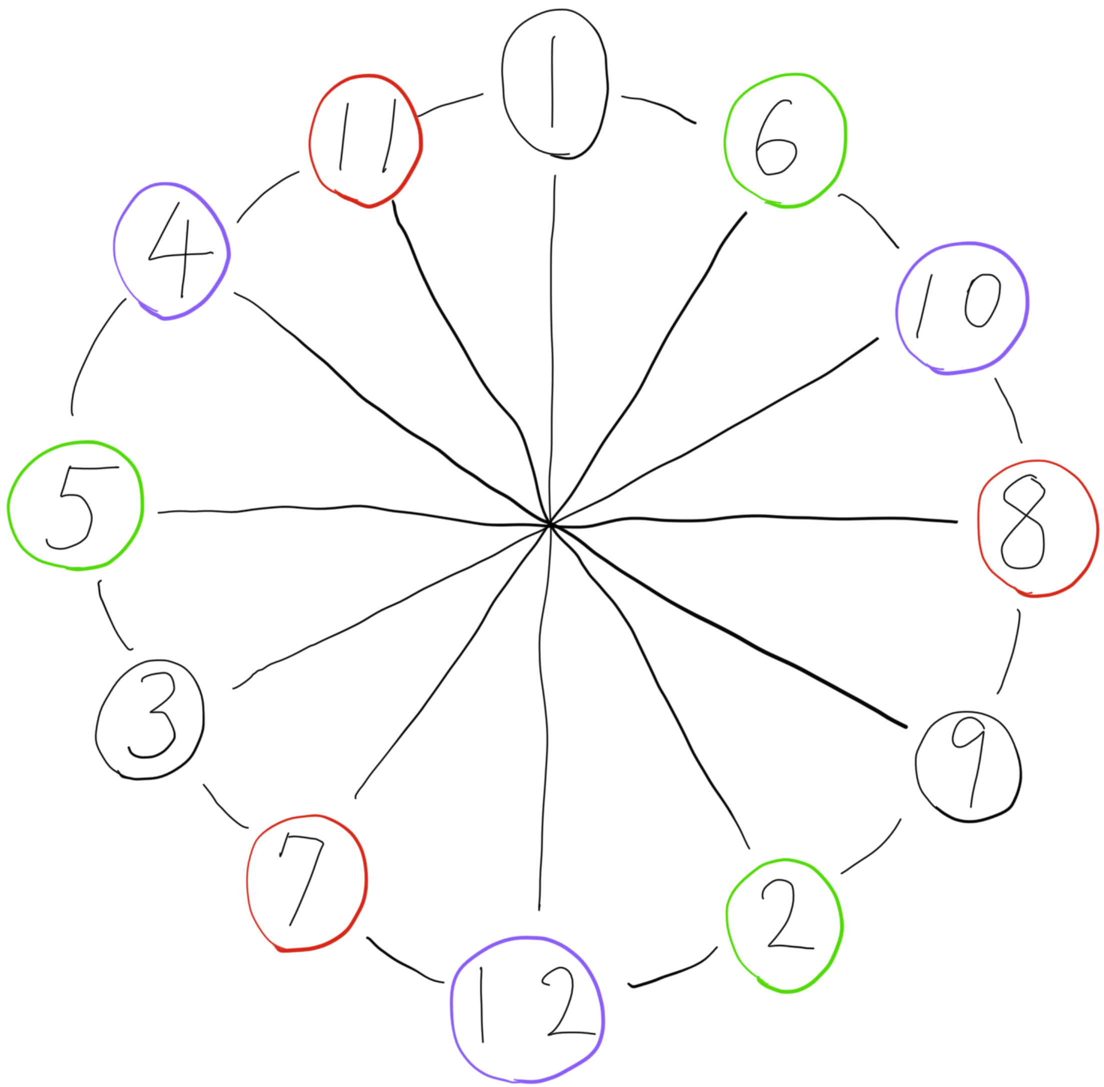
$\therefore 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-2} + X^{n-1} = 0$

円周等分多項式（円分多項式）

変な時計



変な時計２



ご清聴有難うございました